

## תרגיל מס' 7 במושגי יסוד באלגברה לא קומוטטיבית

1. יהי  $D$  חוג עם חילוק. המציין של  $D$  הוא הטבעי המינימלי  $n \geq 1$  כך ש-  $n \cdot 1 = 1 + \dots + 1$  ( $n$  פעמים) שווה ל-0 (אם אין  $n$  כזה, נאמר שהמציין הוא 0).

א. הראו כי המציין של  $D$  הוא אפס או מספר ראשוני.

ב. הראו כי אם המציין הוא ראשוני  $p$ , אזי קיים שיכון  $\mathbf{F}_p \rightarrow D$ .

2. יהי  $D$  חוג עם חילוק ממציין  $p > 0$ .

הראו כי אם  $G \subseteq D^\times$  תת חבורה סופית של החבורה הכפלית  $D^\times$ , אזי  $G$  ציקלית.

רמז: הראו כי הקבוצה  $E = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g : a_g \in \mathbf{F}_p \subset D \right\}$  היא חוג עם חילוק סופי.

3. יהי  $D$  חוג עם חילוק (ממציין כלשהו).

א. הראו כי תת-חבורה קומוטטיבית וסופית  $G \subseteq D^\times$  היא ציקלית.

רמז: הראו כי החוג עם חילוק הנוצר ע"י כל איברי  $G$  (ז.א. חיתוך כל תת-החוגים עם חילוק ב- $D$  המכילים את  $G$ ) הוא שדה.

ב. תנו דוגמה לחוג עם חילוק  $D$  ולתת-חבורה סופית  $G \subseteq D^\times$  שאינה ציקלית.