

Algebra II
9. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei K ein algebraischer Zahlkörper und $x \in K$. Gilt $\|x\| = 1$ für alle bis auf höchstens einen der normierten Absolutbeträge von K , so ist x eine Einheitswurzel.

Aufgabe 2:

Sei K eine endliche Erweiterung von \mathbb{Q}_p mit Ganzheitsring R und Restklassenkörper k mit $|k| = p^r$. Sei K_0 die maximal unverzweigte Zwischenerweiterung mit Ganzheitsring R_0 .

- Es gilt $R_0 = \mathbb{Z}_p[\zeta]$, wobei ζ eine primitive $(p^r - 1)$ -te Einheitswurzel ist.
- Zeige, dass K_0/\mathbb{Q}_p eine endliche Galoiserweiterung von Grad r ist.
- Ferner sei K/\mathbb{Q}_p eine Galoiserweiterung. Zeige, dass der kanonische Homomorphismus von Galoisgruppen

$$\text{Gal}(K/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \text{Gal}(k/\mathbb{F}_p)$$

durch $\text{Gal}(K_0/\mathbb{Q}_p)$ faktorisiert und dort einen Isomorphismus $\text{Gal}(K_0/\mathbb{Q}_p) \simeq \text{Gal}(k/\mathbb{F}_p)$ liefert.

Aufgabe 3:

Sei p eine Primzahl, K eine endliche Körpererweiterung von \mathbb{Q}_p und L und E endliche Körpererweiterungen von K .

- Für die Verzweigungsindizes gilt: $e(LE/E) \leq e(L/K)$.
- Sind die Erweiterungen E/K und L/K unverzweigt, so auch LE/K .
- Zeige anhand eines Beispiels, daß LE/K nicht notwendig voll verzweigt ist, auch wenn E/K und L/K voll verzweigt sind.

Aufgabe 4:

Sei p eine Primzahl, v die p -adische Bewertung.

- Ist $n = \sum_{i=0}^r a_i p^i \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_i < p$, so ist $v(n!) = \frac{1}{p-1} \sum_{i=0}^r a_i (p^i - 1)$.

Sei nun K eine endliche Erweiterung von \mathbb{Q}_p , $|\cdot|$ die Fortsetzung des p -adischen Absolutbetrages auf K . Sei $x \in K$.

- Die Reihe $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert genau dann, wenn $|x| < p^{-\frac{1}{p-1}}$.
- Die Reihe $\log(1+x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ konvergiert genau dann, wenn $|x| < 1$.

Abgabe: Donnerstag, 19. Dezember 2013.