

Algebra II
4. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei $\alpha = \sqrt[3]{2}$ und $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Sei R der Ring der ganzen Zahlen von K . Bestimme die Primidealzerlegung der Hauptideale (2) und (3) in R . Beachte dafür, dass $3 = (\alpha - 1)(\alpha + 1)^3$. Folgere, dass α und $\alpha + 1$ Primelemente von R sind.

Aufgabe 2:

Wie in Aufgabe 1 sei $\alpha = \sqrt[3]{2}$ und $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Sei R der Ring der ganzen Zahlen von K . Zeige in den folgenden Schritten, dass $R = \mathbb{Z}[\alpha]$.

a) Sei $z = a + b\alpha + c\alpha^2$ ein Element von R . Berechne die Spuren von z , αz und $\alpha^2 z$. Folgere, dass $6R \subset \mathbb{Z}[\alpha]$.

b) Wir wissen aus Aufgabe 1, dass α ein Primideal in R erzeugt. Zeige, dass α auch in $\mathbb{Z}[\alpha]$ prim ist, dass $\alpha\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z}[\alpha] \cap \alpha R$ und dass $\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha) = R/(\alpha)$.

c) In b) ersetze α durch $\alpha + 1$ und folgere, dass $R = \mathbb{Z}[\alpha] + 3R$.

d) SchlieÙe aus a), b) und c), dass $R = \mathbb{Z}[\alpha]$.

Aufgabe 3:

Berechne die Diskriminante $\Delta(\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]/\mathbb{Z})$.

Aufgabe 4:

a) Sei p eine ungerade Primzahl. Zeige, dass $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

b) Zeige, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ein euklidischer Ring ist.

c) Eine ungerade Primzahl p lässt sich genau dann in der Form $x^2 + 2y^2$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ darstellen, wenn $p \equiv 1, 3 \pmod{8}$.

Tip zu a): Sei ζ eine primitive achte Einheitswurzel in einem algebraischen Abschluss von \mathbb{F}_p . Sei $y = \zeta + \zeta^{-1}$. Dann gilt $y^2 = 2$. Betrachte nun y^p .

Abgabe: Donnerstag, 14. November 2013.