Prof. Dr. M. Rapoport **WS 2012/13**
T. Richarz

Einführung in die Algebra

Nachklausur

Aufgabe 1:
Sei G eine endliche Gruppe, und seien H, $K \subset G$ Normalteiler, sodass $|H|$ und $|K|$ teilerfremd sind.

a) Zeige, dass $H \cap K = \{1\}$.

b) Zeige, dass $hk = kh$ für alle $h \in H$ und $k \in K$.

c) Sei $|G| = |H| \cdot |K|$. Zeige, dass G zu $H \times K$ isomorph ist.

Aufgabe 2:
Bestimme für den Ring $R = \mathbb{R}[X]/(X^3 - X^2 + X - 1)$

a) seine Nullteiler.

b) seine Einheiten.

c) seine Primideale.

Aufgabe 3:
Sei K ein Körper und $g \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $d > 0$. Zeige, dass jedes Polynom in $K[X]$ eine eindeutige Darstellung der Form $\sum_{i=0}^{\infty} a_i g^i$ hat, wobei $a_i \in K[X]$ vom Grad $< d$ sind.

Aufgabe 4:
Zeige, dass die folgenden Polynome irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ sind.

a) $X^5 + 27X^4 + 108X^3 - 6X^2 - 30X + 48$

b) $X^3 + 207X^2 - 4X + 7$

c) $X^3 + 32$

Aufgabe 5:

Entscheide welche der folgenden Ringe Hauptidealringe sind (mit Begründung).

a) der Ring $K[X]$ für einen Körper K

b) der Ring $\mathbb{F}_p$

c) der Ring $\mathbb{Z}[X]/(X^5 + 5)$

d) der Ring $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

Aufgabe 6:
Sei K/k eine endliche Körpererweiterung und $a \in K$.

a) Zeige, dass $k(a) = k(a^2)$ als Zwischenkörper von K/k, falls das Minimalpolynom von a über k einen ungeraden Grad hat.

b) Gib ein Beispiel an, in dem der Grad des Minimalpolynoms von a über k gerade ist, aber trotzdem $k(a) = k(a^2)$ gilt.

c) Gib ein Beispiel an, in dem 3 nicht den Grad des Minimalpolynoms von a über k teilt, aber $k(a) \neq k(a^3)$ als Zwischenkörper von K/k.