Prof. Dr. M. Rapoport
E. Hellmann
SS 2011

Einführung in die komplexe Analysis

Übungsblatt 6

Abgabe 23.05.2011

Aufgabe 1:

Bestimme die Polstellen der folgenden Funktionen und berechne die Laurententwicklung auf den angegebenen Kreisringen U_1, U_2 und U_3.

(i)
$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+i)}$$
mit $U_1 = \{0 < |z| < 1\}$, $U_2 = \{1 < |z| < \infty\}$ und $U_3 = \{0 < |z+i| < \infty\}$,

(ii)
$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$
mit $U_1 = \{0 < |z| < 1\}$, $U_2 = \{1 < |z| < 2\}$ und $U_3 = \{2 < |z| < \infty\}$.

Aufgabe 2:

Bestimme das Konvergenzgebiet der folgenden Laurentreihen:

(i) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n$,

(ii) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n+1}$,

(iii) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n (z+2)^n$.

Aufgabe 3:

Seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $a \neq b$. Sei $L = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$ die Strecke von a nach b. Zeige, dass es genau 2 holomorphe Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{C}\backslash L \to \mathbb{C}$ gibt, die
$$f_i(z)^2 = (z-a)(z-b),\ i = 1,2$$
erfüllen.

Aufgabe 4:

Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $A \subset U$ eine diskrete Teilmenge und $f : U\backslash A \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige, dass f genau dann eine Stammfunktion auf $U\backslash A$ hat, wenn alle Residuen von f verschwinden.