Prof. Dr. M. Rapoport
E. Hellmann SS 2011

Einführung in die komplexe Analysis

Übungsblatt 2

Abgabe 18.04.2011

Aufgabe 1:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene und zusammenhängende Teilmenge. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ zweimal komplex differenzierbar. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f is konstant,

(ii) $\operatorname{Re} f$ is konstant,

(iii) $\operatorname{Im} f$ is konstant,

(iv) $|f|$ is konstant.

Aufgabe 2:
Gibt es eine komplex differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

(i) $\operatorname{Re} f(x + iy) = x^2 + y^2$,

(ii) $\operatorname{Re} f(x + iy) = \exp(x)\sin(y)$?

Aufgabe 3:
Entwickele die folgenden Funktionen in eine Potenzreihe um $z_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.

(i) $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$,

(ii) $f(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$,

(iii) $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)(1+z)^2}$.

Aufgabe 4:
Finde eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ mit Konvergenzradius 1, die auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

(i) nirgendwo konvergiert,

(ii) in genau einem Punkt nicht konvergiert,

(iii) überall konvergiert,

(iv) in mindestens zwei Punkten konvergiert und in mindestens zwei Punkten divergiert.