Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann

Sommersemester 2011

Klausur zur Vorlesung Einführung in die komplexe Analysis

14.07.2011

Name, Vorname	
Tutor	
Matrikelnr.	
Semester	
E-mail	

Zugelassene Hilfsmittel: Papier, Stift.

Hinweise:

(i) Bitte schreiben Sie mit Kugelschreiber oder Füller in blauer oder schwarzer Farbe.

(ii) Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

(iii) Füllen Sie das Deckblatt bitte vollständig und lesbar aus.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
erreichbare Punkte	6	7	6	8	8	7	42
erreichte Punkte							

Note:

Aufgabe 1: (2+2+2 Punkte)
Welche der folgenden Funktionen sind in den angegebenen Stellen komplex differenzierbar? Begründe die Antwort!

(i) $f(z) = \sin(\bar{z} + z)$ in $z_0 = 3\pi i$,

(ii) $f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + 5x + i(-y^3 + 5y + 3x^2 y)$ in $z_0 = 2 - 5i$,

(iii) $f(z) = \begin{cases} \overline{\sin(\bar{z})} & , \operatorname{Im} z \geq 0 \\ \sin(z) & , \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$ in $z_0 = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 2: (7 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} g$ und $f(z_0) = g(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in U$. Zeige, dass $f = g$ gilt.

Aufgabe 3: (3+3 Punkte)
Bestimme den Typ der Singularität von f an der Stelle z_0. Berechne das Residuum und im Fall einer hebbaren Singularität die holomorphe Fortsetzung in den angegebenen Punkten.

(i) $f(z) = \frac{(z-1)^2(z+3)}{\sin(z)}$ an der Stelle $z_0 = 0$.

(ii) $f(z) = \frac{\cos(z)}{z^2 + \frac{\pi}{2} z - \frac{\pi^2}{2}}$ an den Stellen $z_0 = \frac{\pi}{2}$ und $z_1 = -\pi$.

Aufgabe 4:(6+2 Punkte)

(a) Bestimme die Laurentreihenentwicklung $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z + i)^n$ der Funktion

$$f(z) = \frac{z}{(1 + z^2)(z + i)}$$

um den Punkt $-i$ in dem Gebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z + i|\}$.

(b) Stimmt es, dass $\operatorname{Res}_{-i} f = a_{-1}$ gilt? Begründe die Antwort.

Aufgabe 5: (8 Punkte)
Berechne das folgende reelle Integral mit Hilfe des Residuensatzes.

$$\int_0^\infty \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} dx.$$

Aufgabe 6: (7 Punkte)
Es sei $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ und $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ stetig und im Inneren von $\mathbb{B}$ holomorph. Ferner sei $|f(z)| < 1$ für alle z mit $|z| = 1$. Zeige, dass f genau einen Fixpunkt in $\mathbb{B}$ hat.