Dr. E. Viehmann WS 2009/10

Algebra II – Kommutative Algebra

8. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ positiv. Sei $v : k(X,Y) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definiert durch

$$v(\sum_{n,m\geq 0} a_{n,m}X^nY^m) = \min\{n + m\alpha \mid a_{n,m} \neq 0\}$$

und $v(P/Q) = v(P) - v(Q)$ falls $P, Q \in k[X,Y]$ mit $Q \neq 0$.

a) v definiert eine Bewertung mit Wertegruppe $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$.

b) Geben Sie ein Ideal des zugehörigen Bewertungsrings an, das nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 2:
Sei v eine Bewertung eines Körpers K mit Wertegruppe G und Bewertungsring A. Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt isoliert, falls für $0 \leq g_1 \leq g_2$ in G mit $g_2 \in H$ gilt, daß $g_1 \in H$.

a) Ist $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal, so ist $v(A \setminus \mathfrak{p})$ die Menge aller Elemente ≥ 0 einer isolierten Untergruppe von G.

b) Zeigen Sie, daß dies eine Bijektion zwischen den Primidealen von A und den isolierten Untergruppen von G induziert.

Aufgabe 3:
Sei v eine Bewertung eines Körpers K.

a) Sind $x, y \in K$ mit $v(x) \neq v(y)$, so ist $v(x+y) = \min\{v(x), v(y)\}$.

b) Sind $x_1, \ldots, x_n \in K^\times$ mit $x_1 + \cdots + x_n = 0$, so gibt es $i \neq j$ mit $v(x_i) = v(x_j)$.

Aufgabe 4:
Sei $K \subseteq L$ eine algebraische Körpererweiterung vom Grad n. Sei B ein Bewertungsring von L mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_B$ und zugehöriger Bewertung $v : L \twoheadrightarrow G \cup \{\infty\}$. Sei $A = K \cap B$. Zeigen Sie, daß A wieder ein Bewertungsring ist. Sei $\mathfrak{m}_A$ das maximale Ideal. Zeigen Sie, daß $l = B/\mathfrak{m}_B$ eine Erweiterung von $k = A/\mathfrak{m}_A$ ist. Sei f ihr Grad. Sei G' das Bild von $K^\times$ unter $v : L^\times \to G$, und sei $|G : G'| = e$. Zeigen Sie, daß $ef \leq n$. Die Zahlen e und f heißen Verzweigungsindex und Trägheitsgrad der Erweiterung $A \subseteq B$.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3, um ef über K linear unabhängige Elemente zu konstruieren.

Abgabe: Donnerstag, 10. Dezember 2009.

Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/viehmann/kommalg/