Dr. E. Viehmann WS 2009/10

Algebra II – Kommutative Algebra

7. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei A ein Ring und $B \supseteq A$ eine treuflache A-Algebra.

1. Ist B noethersch, so auch A.
2. Sind A, B Ganzheitsringe mit demselben Quotientenkörper, so gilt $B = A$.

Aufgabe 2:
Sei B eine treuflache A-Algebra und M ein A-Modul. Wir betrachten M als Untermodul von $B \otimes_A M$ (mittels $m \mapsto 1 \otimes m$). Sei $\{m_i\} \subset M$ ein Erzeugendensystem von $B \otimes_A M$ als B-Modul. Dann erzeugt $\{m_i\}$ auch den A-Modul M.

Aufgabe 3:
Sei A ein Ring und M ein flacher A-Modul.

1. Sei N ein A-Modul und N_1, N_2 zwei Untermoduln. Zeigen Sie, daß
$$(N_1 \cap N_2) \otimes M = (N_1 \otimes M) \cap (N_2 \otimes M)$$
als Untermoduln von $N \otimes M$.
2. Zeigen Sie, daß die analoge Aussage für unendliche Durchschnitte nicht gilt.

Aufgabe 4:
Sei A ein Bewertungsring mit Quotientenkörper K.

1. Jedes endlich erzeugte Ideal von A ist ein Hauptideal.
2. Es gibt genau dann keinen Ring $A \subsetneq A' \subsetneq K$ wenn A höchstens ein Primideal $\mathfrak{p} \neq 0$ besitzt.

Abgabe: Donnerstag, 3. Dezember 2009.

Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/viehmann/kommalg/