Dr. E. Viehmann WS 2009/10

Algebra II – Kommutative Algebra

6. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei A ein Ring und B eine endlich erzeugte ganze Erweiterung von A. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Zeigen Sie, daß es nur endlich viele Primideale von B gibt, die über $\mathfrak{p}$ liegen.

Hinweis: Betrachten Sie $B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ als $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$-Vektorraum, um zu zeigen, daß $B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ artinsch ist.

Aufgabe 2:
Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erweiterung. Zeigen Sie, daß die induzierte Abbildung $f^a : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ abgeschlossen ist, also, daß das Bild jeder abgeschlossenen Teilmenge von $\mathrm{Spec}(B)$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 3:
Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erweiterung. Sei $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal von B und $\mathfrak{m} = A \cap \mathfrak{n}$. Zeigen Sie, daß $B_\mathfrak{n}$ im allgemeinen nicht ganz über $A_\mathfrak{m}$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie den Unterring $k[X^2 - 1]$ von $k[X]$ (k ein Körper) und das von $X - 1$ erzeugte Ideal.

Aufgabe 4:
Sei A ein Ring und $X \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ die Teilmenge der maximalen Ideale mit der induzierten Topologie. Dann sind äquivalent

1. A ist Jacobson.
2. Ist $Y \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ abgeschlossen, so ist Y der Abschluß von $Y \cap X$.
3. Ist $Y \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ lokal abgeschlossen und nicht leer, so ist $Y \cap X$ nicht leer.

Hierbei ist eine Teilmenge eines topologischen Raumes M lokal abgeschlossen, falls sie Durchschnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Teilmenge von M ist, oder äquivalent dazu, falls sie offen in ihrem Abschluß in M ist.

Abgabe: Donnerstag, 26. November 2009.

Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/viehmann/kommalg/