Dr. E. Viehmann WS 2009/10

Algebra II – Kommutative Algebra

12. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei A ein Ring.

a) Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erweiterung. Sei $P \subset B$ ein Primideal und $\mathfrak{p} = P \cap A$. Zeigen Sie, daß $\mathrm{ht}P \leq \mathrm{ht}\mathfrak{p}$.

b) Sei B eine A-Algebra für die going-down gilt. Sei $P \subset B$ ein Primideal und $\mathfrak{p} = P \cap A$. Zeigen Sie, daß $\mathrm{ht}P \geq \mathrm{ht}\ \mathfrak{p}$.

c) Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erweiterung. Folgern Sie, daß $\dim A = \dim B$.

Aufgabe 2:
Sei $A = \bigoplus A_i$ ein graduierter Ring und $u \in A_0^\times$. Für $x = \sum x_i \in A$ sei $T_u(x) = \sum x_i u^i$.

a) Zeigen Sie, daß T_u ein Automorphismus von A ist.

b) Der Ring A_0 enthalte einen unendlichen Körper k. Zeigen Sie, daß ein Ideal I von A genau dann von homogenen Elementen erzeugt ist wenn $T_u(I) = I$ für alle $u \in k^\times$.

Ein Beispiel eines noetherschen Ganzheitsrings A mit $\dim A = \infty$ (Nagata)
Sei k ein Körper und $R = k[x_1, \dots]$ der Polynomring über k in abzählbar unendlich vielen Variablen. Seien $m_1 < m_2 < \cdots$ ganze Zahlen mit $m_{i+1} - m_i > m_i - m_{i-1}$ für alle $i > 1$. Sei $\mathfrak{p}_i = (x_{m_i+1}, \dots, x_{m_{i+1}})$. Sei $S = R \setminus \bigcup_i \mathfrak{p}_i$.

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, daß S multiplikativ abgeschlossen ist.

b) Zeigen Sie $\dim S^{-1}R = \infty$.

Aufgabe 4:
Zeigen Sie

a) Die maximalen Ideale von $A = S^{-1}R$ sind genau die Ideale $\mathfrak{p}_i A$.

b) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A ist die Lokalisierung $A_\mathfrak{m}$ noethersch.

c) Jedes $x \in A \setminus \{0\}$ ist nur in endlich vielen maximalen Idealen enthalten.

d) Ein Ring mit b) und c) ist noethersch.
Hinweis: [AM], Aufgabe 7.9 enthält eine Anleitung.

Abgabe: Donnerstag, 21. Januar 2010.

Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/viehmann/kommalg/