Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **WS 2007/08**

Übungen zur Algebraischen Geometrie 2

Blatt 14

In den beiden ersten Aufgaben diskutieren wir den Begriff des *effektiven relativen Cartier-Divisors*. Sei S ein Schema und X ein S-Schema. Ein abgeschlossenes Unterschema $D \subset X$ heißt effektiver (relativer) Cartier-Divisor, wenn D flach über S ist und die Idealgarbe $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{O}_X$ von D ein invertierbarer $\mathscr{O}_X$-Modul ist.

Wir haben dann eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X \xrightarrow{\ell} \mathscr{I}^{-1} \longrightarrow \mathscr{I}^{-1}/\mathscr{O} \longrightarrow 0.$$

Es ist $\mathscr{I}^{-1}/\mathscr{O} \cong \mathscr{O}_D \otimes \mathscr{I}^{-1}$. Wir können ℓ als globalen Schnitt von $\mathscr{I}^{-1}$ betrachten. Ist andererseite $\mathscr{L}$ ein Geradenbündel auf X, $\ell\colon \mathscr{O} \to \mathscr{L}$ injektiv, und $\mathscr{L}/\mathscr{O}$ flach über S, so erhalten wir einen effektiven relativen Cartier-Divisor (das zugehörige abgeschlossene Unterschema ist die "Nullstellenmenge" von ℓ, die Idealgarbe ist $\mathscr{L}^{-1}$).

Aufgabe 53

Seien S ein lokal noethersches Schema, $f\colon X \to S$ ein flacher Morphismus von endlichem Typ, und $D \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema mit zugehöriger Idealgarbe $\mathscr{I}$.

Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) D ist ein effektiver relativer Cartier-Divisor in X/S.

ii) Für jeden Morphismus $T \to S$ ist das Urbild von D in $X \times_S T$ ein effektiver relativer Cartier-Divisor in $X \times_S T/T$.

iii) Es ist D flach über S, und für jeden Morphismus $T = \operatorname{Spec} K \to S$, K ein algebraisch abgeschlossener Körper, ist das Urbild von D in $X \times_S T$ ein effektiver relativer Cartier-Divisor in $X \times_S T/T$.

iv) Für alle $x \in X$, $s = f(x)$, wird der Halm $\mathscr{I}_x \subset \mathscr{O}_{X,x}$ von einem Element erzeugt, dessen Bild in $\mathscr{O}_{X_s,x}$ regulär (d. h. kein Nullteiler) ist.

Hinweis. Man kann das lokale Kriterium für Flachheit anwenden; siehe zum Beispiel [E], Theorem 6.8. Siehe auch [KM] Cor. 1.1.5.2 oder [BLR], Lemma 8.2/6.

Aufgabe 54

Sei nun S ein noethersches Schema, $f\colon C \to S$ ein eigentlicher Morphismus, der glatt von relativer Dimension 1 ist. Sei $D \subset C$ ein effektiver relativer Cartier-Divisor.

a) D ist endlich über S. (*Hinweis.* Sicher ist D eigentlich über S. Es genügt daher zu zeigen, dass die Fasern des Morphismus $g\colon D \to S$ endlich sind.)

Es ist also D endlich und flach über S, folglich ist $g_*\mathscr{O}_D$ ein lokalfreier $\mathscr{O}_S$-Modul von endlichem Rang. Dieser Rang ist konstant auf den Zusammenhangskomponenten; wir bezeichnen ihn als den Grad von D, in Zeichen: $\deg D$.

b) Zeige: ist $P \in C(S)$, also P ein Schnitt von f, so ist das Bild von P ein effektiver relativer Cartier-Divisor vom Grad 1. Ist andererseits D ein effektiver relativer Cartier-Divisor vom Grad 1, so existiert ein eindeutig bestimmter Schnitt $P \in C(S)$, so dass D der zu P gehörige Cartier-Divisor ist. Wir bezeichnen unten mit $I(P)$ die Idealgarbe dieses Cartier-Divisors, mit $I^{-1}(P)$ ihr Inverses.

Bemerkung. Vgl. [KM] 1.2. Wenn man voraussetzt, dass f von endlicher Präsentation ist, kann man die Voraussetzung "S noethersch" fallenlassen. Die Technik dazu wird erklärt in [EGA IV_3] §8; siehe auch Corollaire (11.2.7).

Aufgabe 55

Sei $f\colon X \to S$ ein flacher, eigentlicher Morphismus lokal noetherscher separierter Schemata, mit geometrisch reduzierten Fasern. Sei

$$X \longrightarrow Y \xrightarrow{g} S$$

die Stein-Faktorisierung von f. In dieser Situation ist der endliche Morphismus g glatt (von relativer Dimension 0). Darüberhinaus ist der Basiswechselhomomorphismus $u^*f_*\mathscr{O}_X \to f'_*\mathscr{O}_{X'}$ (vgl. Aufgabe 45) für jeden Morphismus $u\colon S' \to S$ ein Isomorphismus. (Mit $X' = X \times_S S'$, $f'\colon X' \to S'$.) Man nennt f *kohomologisch flach in Dimension* 0. Siehe EGA III_2, (7.8.6).

Folgere, dass unter diesen Voraussetzungen die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) Es ist $f_*\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_S$.

ii) Die Fasern von f sind geometrisch zusammenhängend.

Aufgabe 56

Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, $\mathscr{F}$ ein $\mathscr{O}_X$-Modul, und $\mathscr{E}$ ein lokalfreier $\mathscr{O}_Y$-Modul von endlichem Rang.

Beweise die Projektionsformel: man hat natürliche Isomorphismen

$$R^i f_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} f^*\mathscr{E}) \xrightarrow{\cong} (R^i f_*\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{E}.$$

Mit den in diesen Aufgaben erarbeiteten Ergebnissen sind wir gut gerüstet, um den *Satz von Abel* (in einer modernen Form) zu beweisen.

Sei S ein Schema. Eine elliptische Kurve über S ist ein eigentlicher glatter Morphismus $f\colon E \to S$, zusammen mit einem Schnitt $e\colon S \to E$, $f \circ e = \mathrm{id}_S$, so dass alle Fasern von f geometrisch zusammenhängende (glatte, projektive) Kurven vom Geschlecht 1 sind.

Theorem. Auf E existiert eine eindeutig bestimmte Struktur eines S-Gruppenschemas (d. h. für jedes S-Schema T ist die Menge $E(T)$ der T-wertigen Punkte von E mit der Struktur einer Gruppe versehen, und diese Gruppenstrukturen sind funktoriell in T), so dass für jedes S-Schema T und Punkte $P, Q, R \in E(T) = (E \times_S T)(T)$ genau dann $P + Q = R$ gilt, wenn eine invertierbare Garbe $\mathscr{L}_0$ auf T und ein Isomorphismus

$$I^{-1}(P) \otimes I^{-1}(Q) \otimes I(e_T) \cong I^{-1}(R) \otimes f_T^* \mathscr{L}_0$$

invertierbarer Garben auf $E \times_S T$ existieren.

Hinweis: Das ist [KM], Thm. 2.1.2. Folge dem dort gegebenen Beweis.

Literatur

[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, *Néron models*, Springer Erg. der Math., 3. Folge, Bd. **21**.

[E] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer Graduate Text in Math. **150**

[KM] N. Katz, B. Mazur, *Arithmetic Moduli of Elliptic Curves*, Ann. of Math. Studies **108**, Princeton University Press.