Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **SS 2004**

Lineare Algebra II

9. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 29.06.04 in der Vorlesung

Aufgabe 1

a) Die Matrix $A \in M_n(K)$ habe Jordansche Normalform. Bestimme eine Matrix $S \in GL_n(K)$, so dass $S^{-1} \cdot {}^tA \cdot S$ Jordansche Normalform hat.

b) Zeige, dass jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ zu ihrer transponierten Matrix ${}^tA$ ähnlich ist.

c) Zeige, dass sich jede Matrix aus $M_n(\mathbb{C})$ als Produkt von zwei symmetrischen Matrizen schreiben läßt, von denen mindestens eine invertierbar ist.

Aufgabe 2

Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl.

a) Sei $k \geq 1$ eine ganze Zahl, und sei $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Zeige, dass eine Matrix $B \in GL_N(\mathbb{C})$ existiert mit $B^k = A$. Ist es notwendig vorauszusetzen, dass A invertierbar ist?

b) Bestimme eine Matrix $B \in M_3(\mathbb{Q})$, so dass $B^3 = A$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Sei K ein Körper, und sei f ein trigonalisierbarer Endomorphismus des n-dimensionalen K-Vektorraums V. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) Das charakteristische Polynom χ_f und das Minimalpolynom μ_f von f stimmen überein.

ii) In der Jordanschen Normalform gibt es zu jedem Eigenwert nur einen Jordanblock.

iii) Für alle Eigenwerte λ von F gilt: $\dim V(\lambda, f) = 1$.

iv) Es gibt ein $v \in V$, so dass $(v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ eine Basis von V ist.

v) Es gibt eine Basis B von V, so dass f bezüglich B die folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 1 & & 0 & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & * \end{pmatrix}$$

vi) Es gibt eine Basis B von V, so dass f bezüglich B die folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & & 0 & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

wobei $\chi_f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$.

vii) Für jede Zerlegung $\chi_f = p \cdot q$ von Polynomen in $K[X]$ gilt:

$$\operatorname{im} p(f) = \ker q(f).$$

Aufgabe 4

Schreibe die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 9 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -8 & -10 \\ -1 & 0 & 8 & 10 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$$

in der Form $A = D + N$, wobei D eine diagonalisierbare Matrix und N eine nilpotente Matrix ist und drücke D und N als Polynome in A aus.