Lineare Algebra II

Lösungsvorschläge zur Klausur

Aufgabe 1

Da der Körper der komplexen Zahlen algebraisch abgeschlossen ist, zerfällt das charakteristische Polynom von A vollständig in Linearfaktoren, folglich ist A trigonalisierbar und daher ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform. Da alle irreduziblen Teiler des charakteristischen Polynoms auch Teiler des Minimalpolynoms sind, sehen wir genauer, daß 1 und 2 die Eigenwerte von A sind. Die Ordnung der Nullstelle im Minimalpolynom gibt die Größe des größten Jordanblocks zu diesem Eigenwert an: es gibt also einen Jordanblock der Größe 3 zum Eigenwert 2 und einen Block der Größe 2 zum Eigenwert 1.

Da es sich bei A um eine 6×6-Matrix handelt, bleibt nur noch Platz für einen Jordanblock der Größe 1. Weil aber die Dimension des Eigenraums $V(2, A)$ von A zum Eigenwert 2 gleich 1 ist, existiert zum Eigenwert 2 nur ein einziger Jordanblock. Also muß der fehlende Jordanblock ein Block zum Eigenwert 1 sein und wir erhalten als Jordansche Normalform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Durch komplexe Konjugation erhalten wir aus der Gleichung $A = D + N$, daß

$$A = \overline{D} + \overline{N},$$

denn A hat nach Voraussetzung nur reelle Einträge. Nun ist aber $\overline{N}$ offenbar wieder nilpotent, und $\overline{D}$ ist diagonalisierbar: ist $S \in GL_n(\mathbb{C})$, so daß $S^{-1}DS$ Diagonalgestalt hat, so ist auch $\overline{S} \in GL_n(\mathbb{C})$, und $\overline{S}^{-1}\overline{DS}$ ist eine Diagonalmatrix.

Schließlich vertauschen $\overline{D}$ und $\overline{N}$, da dies für D und N gilt. Insgesamt folgt dann aus der Eindeutigkeit der Jordanzerlegung, daß $D = \overline{D}$ und $N = \overline{N}$, und das ist gerade die Behauptung.

Aufgabe 3

1. Lösung. Durch scharfes Hinschauen sieht man, daß

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nun ist die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

als Produkt von $-E_3$ und einer Permutationsmatrix sicherlich orthogonal, und die Matrix

$$P := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist offenbar symmetrisch und ist positiv definit, da ihre Hauptunterdeterminanten

$$\det(2) = 2, \qquad \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 6, \qquad \det P = 9$$

alle positiv sind. Daher ist $A = PS$ die gesuchte Polarzerlegung von A.

2. Lösung Alternativ kann man natürlich die Polarzerlegung durch das allgemeine Rechenverfahren bestimmen. Die Matrix

$$A\,{}^t\!A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch und positiv definit und besitzt daher eine eindeutig bestimmte symmetrische positiv definite Quadratwurzel P. Um diese zu bestimmen, berechnen wir zunächst das charakteristische Polynom χ von $A\,{}^t\!A$:

$$\begin{aligned} \chi(X) &= \det \begin{pmatrix} X-5 & 0 & -4 \\ 0 & X-9 & 0 \\ -4 & 0 & X-5 \end{pmatrix} \\ &= (X-9) \det \begin{pmatrix} X-5 & -4 \\ -4 & X-5 \end{pmatrix} \\ &= (X-9)(X^2 - 10X + 25 - 16) = (X-1)(X-9)^2 \end{aligned}$$

Die Nullstellen von χ sind 1 und 9 (letztere mit Vielfachheit 2). Daher gilt: ist $f \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit $f(1) = 1$, $f(9) = 3$, so ist die gesuchte Quadratwurzel $P = f(A)$ (das ist klar, falls $A\,{}^t\!A$ Diagonalgestalt hätte, und dies können wir durch Konjugieren erreichen).

Da f nur zwei Werte interpolieren muß, können wir f linear wählen, etwa $f(X) = aX + b$, und aus den obigen Bedingungen erhalten wir für a und b die Gleichungen

$$a + b = 1, \qquad 9a + b = 3,$$

und wir sehen, daß

$$f(X) = \frac{1}{4}X + \frac{3}{4}$$

die gewünschten Eigenschaften hat. Also ist

$$P = f(A^t\!A) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Um noch $S = P^{-1}A$ zu bestimmen, invertieren wir zunächst P. Dazu beobachten wir, daß P sich sozusagen als Blockmatrix aus einer 2×2-Matrix und einer 1×1-Matrix zusammensetzt, so daß wir die inverse Matrix in entsprechender Weise aus dem Inversen der 2×2-Matrix und dem Inversen des einzelnen Eintrags zusammensetzen können. Weil

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

erhalten wir so

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Daraus erhalten wir nun auch

$$S = P^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und somit die gesuchte Polarzerlegung $A = PS$.

Aufgabe 4

Wir bestimmen nach dem Gram-Schmidt-Verfahren im i-ten Schritt zunächst einen Vektor v_i, der auf allen vorher bestimmten Vektoren senkrecht steht, und normieren diesen dann zu c_i. Die so berechneten Vektoren c_1, c_2, c_3, c_4 bilden dann die gesuchte Orthonormalbasis.

Es ist $v_1 = b_1$, also

$$c_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} v_2 &= b_2 - (b_2, c_1)c_1 \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also

$$c_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
v_3 &= b_3 - (b_3, c_1)c_1 - (b_3, c_2)c_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

und somit

$$c_3 = \frac{v_3}{\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned}
v_4 &= b_4 - (b_4, c_1)c_1 - (b_4, c_2)c_2 - (b_4, c_3)c_3 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&\quad - \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

folglich

$$c_4 = \frac{v_4}{\frac{1}{9}\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

Das Inverse einer invertierbaren oberen Dreiecksmatrix ist wieder eine obere Dreiecksmatrix. Ist A nun eine orthogonale obere Dreiecksmatrix, so ist $A^{-1} = {}^tA$ einerseits wieder eine obere Dreiecksmatrix, andererseits aber auch eine untere Dreiecksmatrix, also eine Diagonalmatrix. Deswegen ist auch A eine Diagonalmatrix.

Die einzigen Eigenwerte, die eine orthogonale Matrix haben kann, sind 1 und -1, daher ist ein A wie oben von der Form $\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ mit $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$. Andererseits sind auch alle Matrizen dieser Form orthogonal, und wir sehen so, daß es 2^n orthogonale obere Dreiecksmatrizen der Größe $n \times n$ gibt.

Aufgabe 6

Die Implikation 'i) $\Rightarrow$ ii)' ist offensichtlich: ist a wie in i) und sind $v, w \in V$ mit $\langle v, w, \rangle = 0$, so gilt

$$(v, w) = a\langle v, w\rangle = 0.$$

Nun zur Implikation 'ii) $\Rightarrow$ i)'. Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Orthonormalbasis von V bezüglich $\langle\cdot, \cdot\rangle$. Aus Eigenschaft ii) folgt, daß diese Basis auch eine Orthogonalbasis bezüglich $(\cdot, \cdot)$ ist.

Sei $\alpha_i = (b_i, b_i) > 0$. Können wir zeigen, daß die α_i alle gleich sind, so können wir $a = \alpha_1$ setzen und sind fertig. Nun gilt aber für beliebige i, j:

$$\langle b_i + b_j, b_i - b_j\rangle = \langle b_i, b_i\rangle - \langle b_i, b_j\rangle + \langle b_j, b_i\rangle - \langle b_j, b_j\rangle = 1 - 1 = 0,$$

also nach unserer Voraussetzung auch

$$0 = (b_i + b_j, b_i - b_j) = (b_i, b_i) + (b_i, b_j) - (b_j, b_i) - (b_j, b_j) = \alpha_i - \alpha_j.$$

Also gilt tatsächlich $\alpha_i = \alpha_j$ für beliebige i, j.

Aufgabe 7

a) Daß U total isotrop ist, heißt gerade, daß $U \subseteq U^\perp$. Andererseits gilt (für jeden Unterraum von V), da (V, β) nicht ausgeartet ist:

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V.$$

In unserem Fall folgt also

$$\dim V = \dim U + \dim U^\perp \leq 2 \dim U,$$

und das ist die zu beweisende Behauptung.

b) Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach n. Der Induktionsanfang $n = 0$ ist offenbar richtig.

Sei nun $n > 0$. Sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Basis von U. Wir ergänzen diese durch Vektoren $u_{n+1}, \ldots, u_{2n}$ zu einer Basis von V. Da β nichtausgeartet ist, existiert zu jedem Tupel $(\alpha_i)_i \in \mathbb{R}^{2n}$ (genau) ein $v' \in V$, so daß

$$\beta(v', u_i) = \alpha_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, 2n.$$

Wir wenden das an mit $\alpha_1 = 1$, $\alpha_i = 0$ für $i > 1$ und finden so einen Vektor $v' \in \langle u_2, \ldots, u_n\rangle^\perp$ mit $\beta(v', u_1) = 1$.

Wir setzen nun $v := v' + \lambda u_1$ mit $\lambda = -\frac{\beta(v', v')}{2}$. Dann ist wieder $v \in \langle u_2, \ldots, u_n\rangle^\perp$ und $\beta(v, u_1) = 1$, und zusätzlich gilt

$$\beta(v, v) = \beta(v', v') + 2\lambda\beta(v', u_1) + \beta(u_1, u_1) = 0.$$

Folglich ist der von u_1 und v erzeugte Unterraum H von V mit der von β induzierten Bilinearform isometrisch zur hyperbolischen Ebene.

Da insbesondere H selbst nichtausgeartet ist, gilt $V = H \perp H^{\perp}$, und da nach Konstruktion von v gilt, daß $\langle u_2, \ldots, u_n \rangle \subseteq H^{\perp}$, können wir aus der Induktionsvoraussetzung schließen, daß $H^{\perp}$ und damit auch V isometrisch zum hyperbolischen Raum ist.