Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **WS 2003/04**

Lineare Algebra I

6. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 25.11.03 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{Q}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}^3$ werde bezüglich der Standardbasen durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 & 2 \\ 5 & 4 & 9 & 27 \\ 1 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$ beschrieben. Durch welche Matrix wird f bezüglich der durchnummerierten Basen

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad d_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{Q}^4$ und

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{Q}^3$ beschrieben?

Aufgabe 2

Sei V ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei a_1, a_2 eine Basis von V. Betrachte die Vektoren

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}a_2, \quad b_3 = -\frac{1}{2}a_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}a_2$$

aus V.

a) Zeige, dass b_1, b_2 eine Basis von V ist. Stelle b_3 als Linearkombination von b_1 und b_2 dar.

b) Die linearen Abbildungen $f, g\colon V \longrightarrow V$ seien definiert durch:

$$\begin{aligned} f(b_1) &= b_2 \qquad & f(b_2) &= b_1 \\ g(b_1) &= b_2 \qquad & g(b_2) &= b_3 \end{aligned}$$

Bestimme $f(b_3)$ und $g(b_3)$.

c) Berechne die Matrizen

$$c^A_A(f),\ c^A_A(g),\ c^A_A(f\circ g),\ c^B_B(f),\ c^B_B(g),\ c^B_B(f\circ g),\ c^B_B(g\circ g)$$

bezüglich der durchnummerierten Basen $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper.

a) Bestimme alle K-linearen Abbildungen $f\colon K \longrightarrow K$. *Hinweis:* Betrachte $f(1)$.

b) Seien $a, b \in K$. Betrachte $f\colon K^2 \longrightarrow K$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto ax + by$. Bestimme eine Basis von $\ker f$. Wann ist f surjektiv?

c) Sei $K = \mathbb{Q}$, und sei $\ell_A\colon K^4 \longrightarrow K^3$ die durch $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ gegebene lineare Abbildung. Bestimme Basen von $\ker \ell_A$ und $\operatorname{im} \ell_A$.

Aufgabe 4

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und sei $V^* = \operatorname{Hom}(V, K)$ der Dualraum von V. Zeige:

a) Bilden die Elemente $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V, so sind die Elemente $\ell_1, \ldots, \ell_n$, definiert durch $\ell_i(b_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$, eine Basis von V^*. (Diese wird als die zu $b_1, \ldots, b_n$ duale Basis bezeichnet.)

b) Die Abbildung $\Phi : V \longrightarrow (V^*)^*$, $x \mapsto \ell_x$ mit $\ell_x(f) = f(x)$, ist ein Isomorphismus.

Sei nun $f : V \longrightarrow W$ ein Homomorphismus von endlich-dimensionalen K-Vektorräumen. Wir definieren eine Abbildung $f^* : W^* \longrightarrow V^*$ durch $f^*(\ell)(v) = \ell(f(v))$ $(v \in V)$. Zeige:

c) Die Abbildung f^* ist linear. (Sie heißt der zu f duale Homomorphismus.)

d) Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn f^* surjektiv ist, und f ist genau dann surjektiv, wenn f^* injektiv ist.