**Prof. Dr. M. Rapoport** **WS 2003/04**
**Dr. U. Görtz**

**Lineare Algebra I**

**2. Übungsblatt**

Abgabe: Dienstag, 28.10.03 in der Vorlesung

**Aufgabe 1** a) Gib die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems an:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
2x & + & 3y & & & - & u & + & v & = & 6 \\
x & - & y & + & z & - & 2u & + & v & = & 3 \\
 & - & y & + & z & & & - & v & = & 0 \\
4x & + & y & + & 2z & - & 5u & + & 3v & = & 12
\end{array}$$

b) Zeige, dass das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & & & + & 2z & = & -1 \\
2x & + & y & & & = & 3 \\
7x & + & 2y & + & 6z & = & 4
\end{array}$$

keine Lösung besitzt. Beschreibe den Lösungsraum des zugehörigen homogenen Systems.

**Aufgabe 2**

Seien $U$ und $V$ Teilräume des $K^n$. Wir definieren den Durchschnitt, die Vereinigung und die Summe von $U$ und $V$:

$$\begin{array}{rcl}
U \cap V & = & \{x \in K^n;\ x \in U \text{ und } x \in V\}, \\
U \cup V & = & \{x \in K^n;\ x \in U \text{ oder } x \in V\}, \\
U + V & = & \{x \in K^n;\ \text{Es existieren } u \in U, v \in V \text{ mit } x = u + v.\}.
\end{array}$$

Zeige:

a) Die Mengen $U + V$ und $U \cap V$ sind Teilräume des $K^n$.

b) Ist $U \cup V$ ein Teilraum des $K^n$, so gilt $U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$.

**Aufgabe 3**

In der Vorlesung wurden folgende elementare Zeilenumformungen eingeführt:

I Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

II Vertauschung zweier Zeilen

III Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $a \neq 0$

a) Zeige, dass man Operation II durch Hintereinanderausführung mehrerer Operationen vom Typ I und III erhalten kann.

b) Zeige, dass man im Fall von $2 \times 2$-Matrizen die Operation III mit $a \neq \pm 1$ nicht als Hintereinanderausführung von Operationen vom Typ I und II erhalten kann.

**Aufgabe 4**

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Gegeben sei ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

mit reellen Koeffizienten $a_{ij}$, $b_i$. Die folgenden Bedingungen seien erfüllt:

i) Es gilt $a_{ij} \leq 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$.

ii) Es gilt $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq 0$ für alle $1 \leq i \leq n$.

iii) Für jedes $i$ gilt: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$ oder es gibt ein $j$ mit $1 \leq j < i$ und $a_{ij} < 0$.

Zeige, dass das obige Gleichungssystem dann eindeutig lösbar ist.

*Hinweis:* Beweis mit vollständiger Induktion. Zeige zunächst $a_{11} > 0$ und wende dann den Gauß-Algorithmus an.