Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **WS 2003/04**

Lineare Algebra I

Dieses Aufgabenblatt dient zur Vorbereitung auf die Klausur. Natürlich sind aber auch die Bereiche der Vorlesung klausurrelevant, die in den folgenden Aufgaben nicht vorkommen.

Aufgabe 1

Bestimme die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$ in Abhängigkeit von $b \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{rcccccl} bx_1 & + & (1+b)x_2 & + & x_3 & = & 1+b \\ (b-1)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & b \\ (b+1)x & + & (1+2b)x_2 & + & x_3 & = & 1+2b \end{array}$$

Aufgabe 2

Sei K ein Körper und seien $c_1, \dots, c_n \in K$. Zeige: die Matrix

$$\begin{pmatrix} c_1 - 1 & c_1 & \cdots & c_1 \\ c_2 & c_2 - 1 & \cdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_n & \cdots & c_n - 1 \end{pmatrix}$$

ist genau dann invertierbar, wenn $\sum_{i=1}^n c_i \neq 1$.

Aufgabe 3

Sei $U \subseteq \mathbb{Q}^4$ der von den folgenden Vektoren erzeugte Unterraum:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Dimension von U und gib eine Matrix $A \in M_4(\mathbb{Q})$ an, so dass die lineare Abbildung $\ell_A \colon \mathbb{Q}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}^4$ Kern U hat.

Aufgabe 4

a) Zeige, dass die Vektoren b_1, b_2, b_3 eine Basis von $\mathbb{Q}^3$ bilden, wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

b) Sei $f \colon \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^3$ eine lineare Abbildung, die bezüglich der obigen Basis b_1, b_2, b_3 die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hat. Welche Matrix hat f bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{Q}^3$?

Aufgabe 5

Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und f ein Endomorphismus von V. Es gelte $\operatorname{im} f = \operatorname{im} f^2$, und dieser Unterraum sei endlich-dimensional. Zeige: $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.

Aufgabe 6

Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Sei f ein Endomorphismus von V und sei $p = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in K[X]$ ein Polynom. Wir schreiben f^i für die i-fache Verknüpfung $f \circ \cdots \circ f$ von f mit sich selbst ($f^0 := \mathrm{id}_V$), und setzen $p(f) = \sum_{i=0}^n a_i f^i \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeige:

a) Ist λ ein Eigenwert von f, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(f)$.

b) Ist $K = \mathbb{C}$, so gibt es zu jedem Eigenwert μ von $p(f)$ einen Eigenwert λ von f mit $p(\lambda) = \mu$.

Aufgabe 7

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ der Dualraum von V und seien $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in V^*$ $(m \geq 1)$. Zeige:

a) $\dim \bigcap_{i=1}^m \ker \varphi_i \geq \dim V - m$

b) Gilt in a) Gleichheit, so sind $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ linear unabhängig.

Organisatorische Hinweise zur Klausur

- **Termin:** Samstag, 31. Januar 2004, 9 Uhr s.t., Dauer: 2 Stunden
- **Ort:** Wolfgang-Paul-Hörsaal: Übungsgruppen 4, 5, 6, 10, 11, 13
  Großer Hörsaal Mathematik: Übungsgruppen 7, 8, 9
  Kleiner Hörsaal Mathematik: Übungsgruppen 1, 3
  Hörsaal 1 Physik: Übungsgruppen 2, 12
- **Anmeldung:** Bitte melden Sie sich bis zum 27. Januar im Internet für die Klausur an:
  http://www.math.uni-bonn.de/people/ugoertz/klausur.html
  Wenn Sie keinen Internetzugang haben, bitten Sie bitte einen Kommilitonen oder Ihren Übungsgruppenleiter, die Anmeldung für Sie durchzuführen. Für die Anmeldung benötigen Sie Ihre Matrikelnummer.
- Bitte bringen Sie Papier und einen geeigneten Stift (blau oder schwarz; **kein Bleistift**) mit. Andere Hilfsmittel sind nicht zugelassen.
- Bitte halten Sie bei der Klausur Ihren Studentenausweis bereit.
- Die Nachklausur findet statt am Samstag, 24. April 2004, 9 Uhr.