Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz

WS 2003/04

Lineare Algebra I

Präsenzaufgaben, Teil 9

Aufgabe 5

Für $1 \leq i, j \leq 3$ sei $(a_{ij}^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von reellen Zahlen, die für $n \to \infty$ konvergiert. Wir bezeichnen den Grenzwert dieser Folge mit a_{ij}. Es sei $A^{(n)} = (a_{ij}^{(n)})_{ij}$, $A = (a_{ij})_{ij}$. Wir setzen voraus, dass $A^{(n)} \in GL_n(\mathbb{R})$ für alle n und dass $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

a) Für alle n sei $\tau_{12} \in S_3$ die im Sinne der Bruhat-Zerlegung zu $A^{(n)}$ gehörige Permutation. Zeige, dass die zu A gehörige Permutation entweder τ_{12} oder id ist.

b) Zeige, dass Teil a) richtig bleibt, wenn man τ_{12} durch τ_{23} ersetzt, aber falsch ist für τ_{13}.

Aufgabe 6

Sei K ein Körper. Beweise die folgende Variante der Bruhat-Zerlegung: Zu jeder Matrix $A \in GL_n(K)$ gibt es eine eindeutig bestimmte Permutation $\sigma \in S_n$ und eindeutig bestimmte Matrizen $U \in \mathcal{U}_\sigma$, $B \in \mathcal{B}$ mit $A = BP_\sigma U$.

Aufgabe 7

Sei K ein Körper, und seien $i < n$ natürliche Zahlen. Sei σ die Transposition $\tau_{i,i+1} \in S_n$. Zeige, dass die Menge $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}P_\sigma\mathcal{B}$ eine Untergruppe von $GL_n(K)$ ist. (Die Umkehrung ist auch richtig (aber schwieriger zu zeigen): Ist $\sigma \in S_n$, derart dass $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}P_\sigma\mathcal{B}$ eine Untergruppe von $GL_n(K)$ ist, so hat σ die Form $\tau_{i,i+1}$.)

Aufgabe 8

a) Sei K ein Körper, n eine natürliche Zahl, $\sigma \in S_n$. Zeige, dass die Untergruppe $\mathcal{U}_\sigma$ von $GL_n(K)$ in der Gruppe $SL_n(K)$ enthalten ist.

b) Sei K ein Körper. Bezeichne mit τ die Transposition $\tau_{12} \in S_2$. Sei $P'_{\mathrm{id}} = E_2$, $P'_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(K)$. Sei $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cap SL_2(K)$.

Beweise: Jede Matrix $A \in SL_2(K)$ hat eine Darstellung der Form $A = UP'_\sigma B$ mit $\sigma \in S_2$, $U \in \mathcal{U}_\sigma$, $B \in \mathcal{B}'$, und σ, U und B sind eindeutig bestimmt.