Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz

WS 2003/04

Lineare Algebra I

Präsenzaufgaben, Teil 7

Aufgabe 6

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

Sei $f : V \longrightarrow K$ eine lineare Abbildung, die nicht die Nullabbildung ist. Zeige: Ist $v \in V \backslash \ker f$, so sind $\ker f$ und $\langle v \rangle$ Komplementärräume in V.

Aufgabe 7

Sei V ein K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus, so dass für jedes $v \in V$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $f^n(v) = 0$. Zeige: die Abbildung $\mathrm{id} - f\colon V \longrightarrow V$ ist ein Isomorphismus.

Aufgabe 8

Sei P_n der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{i=0}^n c_i x^i$ vom Grad $\leq n$. Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden.

a) Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Auswertungsabbildung $\mathrm{ev}_a\colon P_n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto f(a)$, linear, und damit ein Element des Dualraums von P_n.

b) Gib eine Basis von P_n an, so dass die Elemente $\mathrm{ev}_{a_0}, \ldots, \mathrm{ev}_{a_n}$ gerade die dazu duale Basis bilden.

c) Zeige den Interpolationssatz von Lagrange: Zu $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $f \in P_n$ mit $f(a_i) = \lambda_i$ für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Aufgabe 9

a) Sei K ein Körper, und seien $a, b, c, d \in K$ mit $ad - bc \neq 0$. Zeige, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar ist, und berechne die inverse Matrix.

b) Sei für $i = 1, \ldots, m$ die Matrix A_i eine invertierbare $(n_i \times n_i)$-Matrix. Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, und berechne ihr Inverses.

Aufgabe 10

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und seien $U, W \subseteq V$ Komplementärräume in V. Begründe, dass $H_1 = \mathrm{Hom}(U,U)$, $H_2 = \mathrm{Hom}(U,W)$, $H_3 = \mathrm{Hom}(W,U)$ und $H_4 = \mathrm{Hom}(W,W)$ in natürlicher Weise Unterräume von $\mathrm{Hom}(V,V)$ sind und zeige, dass für alle i stets $H_i \cap \sum_{j \neq i} H_j = 0$ ist, und dass $H_1 + H_2 + H_3 + H_4 = \mathrm{Hom}(V,V)$ gilt.

---

zu Aufgabe 1:

Es ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & -7 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix B ist nicht invertierbar.

zu Aufgabe 2b):

Es ist $A_n^{-1} = (b_{ij})$ mit $b_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} \frac{i(n+1-j)}{n+1} & \text{falls } i \leq j \\ (-1)^{i+j} \frac{(n+1-i)j}{n+1} & \text{falls } i > j \end{cases}$.