Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz

WS 2003/04

Lineare Algebra I

Präsenzaufgaben, Teil 6

Aufgabe 5

Man kann den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ ($i^2 = -1$) einerseits als eindimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum, andererseits als zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen.

a) Zeige, dass $\{1, i\}$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{C}$ ist.

b) Sei $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ die Abbildung, die durch $f(x + iy) = ax + by + i(cx + dy)$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gegeben ist. Zeige: f ist $\mathbb{R}$-linear, und f ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn $a = d$ und $b = -c$.

Aufgabe 6

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Wir bezeichnen mit f^N die N-fache Verkettung $f \circ \cdots \circ f$ von f mit sich selbst. Zeige: Es existieren einen natürliche Zahl N und Elemente $a_0, \dots, a_N \in K$ mit $a_0 \mathrm{id} + a_1 f^1 + \cdots + a_N f^N = 0$.

Aufgabe 7

Sei f ein Endomorphismus des Vektorraumes V mit $f^2 = f$. Zeige, dass $\ker f$ und $\operatorname{im} f$ Komplementärräume in V sind.

Aufgabe 8

Seien $f\colon U \longrightarrow V$ und $g\colon V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen zwischen K-Vektorräumen. Zeige: Ist $g \circ f$ ein Isomorphismus, so sind $\ker g$ und $\operatorname{im} f$ Komplementärräume in V.

Aufgabe 9

Seien $f\colon U \longrightarrow V$ und $g\colon V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen. Zeige:

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim W \leq \operatorname{rg} g \circ f \leq \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g).$$

Aufgabe 10

Die im folgenden beschriebenen Abbildungen $f, g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sind linear. Bestimme die zu f und g gehörigen Matrizen bezüglich der Standardbasis.

a) Die Abbildung f vertauscht zuerst die y- mit der z-Koordinate (das entspricht der Spiegelung an der Ebene $\{y = z\}$), projiziert dann in die x, y-Ebene und dreht diese Ebene dann um 135 Grad entgegen der Uhrzeigerrichung.

b) Die Abbildung g dreht den Raum um die z-Achse um 60 Grad in Uhrzeigerrichtung, skaliert danach entlag der y-Achse mit dem Faktor 2 und projiziert dann in die x, y-Ebene.

Aufgabe 11

Sei $f : V \longrightarrow W$ ein Homomorphismus von endlich-dimensionalen K-Vektorräumen. Wir identifizieren V vermöge des in Aufgabe 4 b) angegebenen Isomorphimus mit V^{**} und entsprechend W mit W^{**}. Zeige, dass $(f^*)^* = f$.