Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **WS 2003/04**

Lineare Algebra I

Präsenzaufgaben, Teil 13

Aufgabe 5

Dividiere jeweils das Polynom f durch das Polynom g mit Rest:

a) $f = \frac{1}{2}X^5 - 7X^3 + 2X^2 - X - \frac{1}{3}, g = 3X^3 + 18X^2 - 4X \in \mathbb{Q}[X]$.

b) $f = \sum_{i=0}^n X^i, g = \sum_{i=0}^m X^i \in K[X]$, K ein Körper.

Aufgabe 6

Sei K ein Körper mit mindestens $n+1$ Elementen, und seien $A, B \in M_n(K)$. Dann gilt $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Aufgabe 7

Sei $D\colon \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{Q}[X]$ die durch $\sum_{i=0}^n a_i X^i \mapsto \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1}$ definierte Abbildung.

a) Zeige, dass D linear ist und folgere, dass $D(fg) = fD(g) + gD(f)$ für alle $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ gilt.

b) Bestimme den Kern und das Bild von D.

Sei $M_X : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{Q}[X]$ die durch $f \mapsto X \cdot f$ gegebene Abbildung.

c) Bestimme sämtliche Eigenwerte von $M_X \circ D$ und $D \circ M_X$.

d) Zeige, dass $\mathbb{Q}[X]$ eine Basis aus Eigenvektoren von $M_X \circ D$ bzw. $D \circ M_X$ besitzt.

Lösung zu Aufgabe 1:

$$A^{12345} = \begin{pmatrix} -49385 & -24690 & -49376 \\ 246924 & 123451 & 246884 \\ -74076 & -37035 & -74065 \end{pmatrix}.$$

Hinweis zu Aufgabe 4:

Ist A keine Skalarmatrix, so ist $\operatorname{rg} L_A = 2$ (denn A und E_2 liegen offenbar im Kern von L_A). Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so ist das charakteristische Polynom von L_A:

$$X^2(X^2 - d),$$

wobei $d = (a-d)^2 + 4bc = (\operatorname{Spur} A)^2 - 4\det A$ gerade die Diskriminante des charakteristischen Polynoms von A ist. Es folgt dann: L_A ist genau dann trigonalisierbar (bzw. diagonalisierbar), wenn A trigonalisierbar (bzw. diagonalisierbar) ist.