Lineare Algebra I — Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

Wir bezeichnen mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}^4$ die Spalten der Matrix A. Es ist

$$a_1 + 2a_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} = 7a_3,$$

und wir sehen

$$\operatorname{im} \ell_A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle a_1, a_2 \rangle.$$

Da die Vektoren a_1 und a_2 offenbar linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis des Bildes von ℓ_A.

Da das Bild von ℓ_A Dimension 2 hat, hat der Kern Dimension 1. Andererseits folgt aus $a_1 + 2a_2 - 7a_3 = 0$, dass das Element $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ im Kern von ℓ_A liegt. Also bildet es eine Basis des Kerns.

Aufgabe 2

Da die Determinante der Matrix A ändert sich nicht, wenn wir für $i = 1, \dots, n$ das a_i-fache der letzten Spalte von der i-ten Spalte abziehen, d.h.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} x - a_1 & a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & x - a_2 & a_2 - a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & x - a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x - a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix auf der rechten Seite ist eine obere Dreiecksmatrix, folglich ist die Determinante einfach das Produkt der Diagonaleinträge, d.h.

$$\det A = (x - a_1) \cdots (x - a_n),$$

wie gewünscht.

Aufgabe 3

Es ist $2u_1 + u_3 = u_2$, daher wird U schon von u_1 und u_3 erzeugt. Da diese beiden Vektoren offensichtlich linear unabhängig sind, hat U die Dimension 2.

Wir definieren

$$W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad W' = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Die als Erzeuger angegebenen Vektoren sind in beiden Fällen offenbar linear unabhängig und sind folglich Basen von W bzw. W'.

Es bleibt zu zeigen, dass U und W, U und W' und W und W' jeweils Komplementärräume in V sind. Aus Dimensionsgründen genügt es zu zeigen, dass U und W, U und W' und W und W' jeweils V erzeugen. Dies können wir überprüfen, indem wir die Basisvektoren der beiden zu betrachtenden Unterräume in eine Matrix schreiben und zeigen, dass deren Determinante nicht verschwindet.

1. $U + W = V$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

2. $U + W' = V$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

2. $W + W' = V$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

Aufgabe 4

a) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det \begin{pmatrix} X+2 & -4 & -1 \\ 1 & X-3 & -1 \\ 3 & -3 & X-2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} X+2 & -4 & -1 \\ 1 & X-3 & -1 \\ 0 & -3X+6 & X+1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} X+2 & -4 & -1 \\ -X-1 & X+1 & 0 \\ 0 & -3X+6 & X+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Wir haben bei der ersten Umformung das 3-fache der zweiten Zeile von der dritten Zeile abgezogen, und bei der zweiten Umformung die erste Zeile von der zweiten Zeile abgezogen.)

Daraus erhalten wir durch Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\begin{aligned} \chi_A &= (X+2)(X+1)^2 + (X+1)(-4(X+1) - 3X + 6) = (X+1)(X^2 + 3X + 2 - 7X + 2) \\ &= (X+1)(X^2 - 4X + 4) = (X+1)(X-2)^2. \end{aligned}$$

Ausmultipliziert erhalten wir

$$\chi_A(X) = (X+1)(X^2 - 4X + 4) = X^3 - 4X^2 + 4X + X^2 - 4X + 4 = X^3 - 3X^2 + 4.$$

b) Die Eigenwerte von A sind gerade die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Folglich hat A die Eigenwerte -1 und 2.

c) **Basis des Eigenraums zum Eigenwert -1**

Es ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $((-1)E_3 - A)x = 0$ zu berechnen. Wir wenden den Gauß-Algorithmus an:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt können wir ablesen, dass der Eigenraum zum Eigenwert -1 eindimensional ist und dass der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis bildet.

Basis des Eigenraums zum Eigenwert 2

Es ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $(2 \cdot E_3 - A)x = 0$ zu berechnen. Wir wenden den Gauß-Algorithmus an:

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und wir sehen, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums zum Eigenwert 2 bildet. Insbesondere ist auch dieser Eigenraum eindimensional.

d) Da das charakteristische Polynom über $\mathbb{Q}$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt, ist A trigonalisierbar. Andererseits ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 2 echt größer als die geometrische Vielfachheit, und daher ist A nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 5

a) Da die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ nach Voraussetzung linear abhängig sind, existiert eine nicht-triviale Linearkombination $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$, $\alpha_i \in K$. Wäre dabei ein $\alpha_i = 0$, so erhielten wir eine nicht-triviale Darstellung das Nullvektors als Linearkombination von $n-1$ Vektoren der v_i; da je $n-1$ dieser Vektoren aber nach Voraussetzung linear unabhängig sind, ist dies nicht möglich.

Genauer sehen wir also: Jede nicht-triviale Darstellung des Nullvektors als Linearkombination der v_i hat die Eigenschaft, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

b) Es sei $\gamma = \beta_1/\alpha_1 \in K$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \gamma\alpha_i)v_i = \sum \beta_i v_i - \gamma \sum \alpha_i v_i = 0,$$

und da nach Definition von γ gilt, dass $\beta_1 - \gamma\alpha_1 = 0$, folgt aus der Zusatzbemerkung in Teil a), dass alle Koeffizienten in der obigen Summe Null sind, d.h. $\beta_i = \gamma\alpha_i$ für alle i.

Aufgabe 6

a) Wenn $f = c \cdot \mathrm{id}_V$ ist, so ist offenbar jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ Eigenvektor zum Eigenwert c, denn es gilt ja gerade $f(v) = cv$. Nun zur Umkehrung: Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V. Da jeder Vektor aus $V \setminus \{0\}$ Eigenvektor ist, existieren $\lambda_i \in K$ mit $f(b_i) = \lambda_i b_i$. Wir zeigen nun, dass alle λ_i gleich sind. Ist nämlich $i \neq j$, so gilt

$$f(b_i + b_j) = f(b_i) + f(b_j) = \lambda_i b_i + \lambda_j b_j,$$

aber andererseits ist nach Voraussetzung $b_i + b_j$ wiederum ein Eigenvektor von f, etwa

$$f(b_i + b_j) = \lambda(b_i + b_j).$$

Dann erhalten wir

$$(\lambda_i - \lambda)b_i + (\lambda_j - \lambda)b_j = f(b_i + b_j) - f(b_i + b_j) = 0,$$

und da b_i und b_j (als Basisvektoren) linear unabhängig sind, folgt

$$\lambda_i - \lambda = 0, \quad \lambda_j - \lambda = 0$$

und damit wie gewünscht $\lambda_i = \lambda = \lambda_j$.

Es ist also tatsächlich $f = c \cdot \mathrm{id}_V$ mit $c = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.

b) Es ist

$$\ker f = \{v \in V;\ f(v) = 0 = 0 \cdot v\} = V(0, f),$$

also ist f genau dann injektiv, wenn 0 kein Eigenwert von f ist. Da f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums ist, ist f genau dann injektiv, wenn f invertierbar ist.

c) Aus Teil b) wissen wir, dass $\lambda \neq 0$, also ist λ tatsächlich invertierbar. Ist $v \in V(\lambda, f)$, so gilt $f(v) = \lambda v$, und durch Anwenden von f^{-1} erhalten wir dann auch $v = f^{-1}(\lambda v)$, das heißt $f^{-1}(v) = \lambda^{-1} v$, und das bedeutet gerade $v \in V(\lambda^{-1}, f^{-1})$. Damit haben wir gezeigt, dass $V(\lambda, f) \subseteq V(\lambda^{-1}, f^{-1})$, und da $(f^{-1})^{-1} = f$ folgt die umgekehrte Inklusion, indem wir das soeben Gezeigte auf f^{-1} anwenden.

Aufgabe 7

a) Dass $f^2 = 0$ ist, heißt gerade, dass $f(v) = 0$ für alle $v \in \operatorname{im} f$, also gilt $\operatorname{im} f \subseteq \ker f$, und es folgt insbesondere $\dim \operatorname{im} f \leq \dim \ker f$. Aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen erhalten wir nun

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f \leq 2 \dim \ker f,$$

und daraus folgt direkt die Behauptung.

b) Die Umkehrung von a) gilt nicht. Dies zeigt das folgende Beispiel: sei $f = \ell_A \colon K^2 \longrightarrow K^2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist offenbar $\dim\ker f = 1 \geq \frac{1}{2}\dim K^2$, aber es ist $f^2 = f \neq 0$.