Übungsblatt 10

Aufgabe 1

Bestimme die Taylor-Approximation 2. Ordnung der folgenden Funktion im Punkt $(x, y, z) = (1, 0, 0)$,

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x\cos(y) + y\exp(z).$$

Aufgabe 2: (Innere der Ellipse)

Sei E die "gefüllte" Ellipse

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\}$$

mit Radien 1 und 1/2. In dieser und der folgenden Aufgabe sollen die globalen Hoch- und Tiefpunkte der folgenden Funktion bestimmt werden,

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2)).$$

Bestimme zunächst die Hoch- und Tiefpunkte von f im Inneren der Ellipse

$$E^\circ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 < 1\}.$$

(Tipp: Hierfür kannst Du wie gewohnt Extrempunkte von f bestimmen und anschließend überprüfen, ob diese in E° liegen.)

Aufgabe 3: (Rand der Ellipse)

a) Sei nun $\partial E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 1\}$ der Rand der Ellipse. Die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \partial E,\ \varphi(t) = (\cos(t), \sin(t)/2)$$

ist surjektiv (dies musst Du nicht zeigen). Zeige, dass φ eine Parametrisierungsabbildung ist, d.h. $\varphi'(t) \neq 0$ für alle t.

b) Bestimme die Extrempunkte von f auf ∂E indem Du die Komposition $f \circ \varphi$ betrachtest.

c) Kombiniere Aufgabenteil b) mit Aufgabe 2 und gib die globalen Extrempunkte von f an.

Aufgabe 4

Die Kugeloberfläche mit Radius r ist die Menge

$$K_r := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}.$$

a) Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \varphi(s, t) = r \cdot (\sin(s)\cos(t), \sin(s)\sin(t), \cos(t))$$

eine Abbildung von $\mathbb{R}^2$ auf K_r ist.

b) Bestimme die Ableitungsmatrix $D\varphi(s, t)$ und alle Punkte (s, t) in denen diese nicht den vollen Rang $(= 2)$ hat. Beispielsweise kannst Du für alle ihre drei 2×2-Untermatrizen die Determinante als Funktion von (s, t) und dann die simultanen Nullstellen dieser drei Determinanten bestimmen.