Monotone Approximationen durch die Stirlingsche Formel

Wir beginnen mit einem einfachen Beweis einer schwachen Form von Stirlings Formel für $n!$:

$$e\,n^n e^{-n} \;\le\; n! \;\le\; e\,n^{n+1/2} e^{-n}.$$

Genauer zeigen wir, dass die Folge $a_n := n!/(n^n e^{-n})$ monoton wachsend ist und $b_n := n!/(n^{n+1/2} e^{-n})$ monoton fallend, also $e = a_1 \le a_n,\; b_n \le b_1 = e$.

Im Beweis verwenden wir die Ungleichungen

$$(1 + x/n)^n \;\le\; e^x \;\le\; (1 + x/n)^{n+x/2},\; x \ge 0,\; \text{speziell } x = 1,$$

deren linke aus $\log(1 + y) \le y$ mit $y = x/n$ folgt . Die rechte Ungleichung folgt aus $\log(1 + y) \ge y/(1 + y/2)$ – dies ist wahr bei $y = 0$ und folgt für $y > 0$, weil für die Ableitungen die entsprechende Ungleichung gilt:

$$1/(1 + y) \ge 1/(1 + y/2) - (y/2)/(1 + y/2)^2 = 1/(1 + y/2)^2.$$

Damit wird der Monotoniebeweis sehr kurz:
Aus den Quotienten a_n/a_{n+1} bzw. b_n/b_{n+1} läßt sich ein Faktor $(n + 1)$ kürzen und es bleibt wegen der Ungleichungen für die Exponentialfunktion

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(1 + 1/n)^n}{e} \le\; 1 \;\le \frac{(1 + 1/n)^{n+1/2}}{e} = \frac{b_n}{b_{n+1}} \qquad \textit{q.e.d.}$$

Es ist wünschenswert, die untere Abschätzung so zu verbessern, dass der Quotient aus der oberen und der unteren Abschätzung gegen eine Konstante konvergiert. Tatsächlich führt der nächste Korrekturfaktor $e^{1/12n}$ in der asymptotischen Stirling Formel wieder zu einer monoton wachsenden Folge $c_n := n!/(n^{n+1/2} e^{-n} e^{1/12n})$ und $c_1 \le c_n$ liefert die bessere Ungleichung

$$e^{11/12}\, n^{(n+1/2)} e^{-n} e^{1/12n} \le\; n!, \quad \text{mit} \;\; c_1 = e^{11/12} \approx 2.5009.$$

Wegen der Monotonie der Folgen und $c_n \le b_n \le c_n e^{1/12n}$ sind diese konvergent mit demselben Grenzwert, also $c_n \le \lim_n c_n =: S_\infty = \lim_n b_n \le b_n$ und das bedeutet (mit: $n = 4 \Rightarrow 2.5065 = c_4 \le S_\infty \le b_4 = 2.559$):

$$S_\infty \cdot n^{n+1/2} e^{-n} \le\; n! \;\le S_\infty \cdot n^{(n+1/2)} e^{-n} e^{1/12n}.$$

Wir werden $S_\infty = \sqrt{2\pi} \approx 2.506628$ finden, die Folge c_n wächst also nur um drei Promille und ab $n = 4$ nur noch um den Faktor $S_\infty/c_4 \approx 1.000052$!

$\sqrt{2\pi}\cdot n^{n+1/2} e^{-n} \approx n!$ ist die bekannteste Approximation von $n!$. Tatsächlich ist es eine untere Schranke, die durch Multiplikation mit $e^{1/12n}$ zu einer oberen Schranke wird, also um weniger als diesen Faktor falsch ist.

Zum Beweis für die wachsende Monotonie von $\{c_n\}$ benötigen wir

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = (1+1/n)^{n+1/2}\exp(-1+\frac{1}{12(n+1)}-\frac{1}{12n}) \le 1$$

und das folgt bei $x=1$ aus folgender Ungleichung für die Exponentialfunktion

$$(1+\frac{x}{n})^{(n+x/2)} \;\le\; \exp\left(x+\frac{x^3}{12\,n(n+x)}\right).$$

Diese ist äquivalent zu der entsprechenden Abschätzung des Logarithmus, nämlich (wähle $y = x/n$):

$$\log(1+y) \;\le\; \frac{y}{(1+\frac{y}{2})} + \frac{y^3}{12(1+\frac{y}{2})(1+y)} = \frac{y}{(1+\frac{y}{2})}\cdot\left(1+\frac{y^2}{12(1+y)}\right).$$

Diese Ungleichung ist wahr, weil wir für die Ableitungen haben

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+y)} \;&\le\; \frac{1}{(1+\frac{y}{2})^2}\cdot\left(1+\frac{y^2}{12(1+y)}\right)+\frac{y}{(1+\frac{y}{2})}\cdot\frac{2y(1+y)-y^2}{12(1+y)^2}\\ &= \frac{1}{(1+y)}\frac{1}{(1+\frac{y}{2})^2}\left(1+y+\frac{y^2}{12}+\frac{y^2}{6}+\frac{y^4}{24(1+y)}\right). \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

In der Stirlingschen asymptotischen Entwicklung für $n!$ ist der nächste Korrekturfaktor $e^{-1/360n^3}$. Wenn auch diese Korrektur zu einer monotonen Folge führen würde, würden die jetzt schon erstaunlich engen Schranken noch erheblich weiter zusammen rücken. Der Induktionsbeweis dafür, dass

$$d_n := n!/\left(n^{(n+1/2)}e^{-n}e^{1/12n}e^{-1/360n^3}\right) \qquad \text{monoton fallend}$$

ist, beginnt wie eben mit d_n/d_{n+1} und benötigt dann eine verbesserte Abschätzung der Exponentialfunktion (die für $x=1$ benutzt wird), nämlich

$$(1+\frac{x}{n})^{(n+x/2)} \;\ge\; \exp\left(x+\frac{x^3}{12\,n(n+x)}-\frac{1}{360}(\frac{x^4}{n^3}-\frac{x^4}{(n+x)^3})\right).$$

Äquivalent dazu ist die Logarithmusabschätzung (wieder mit $y = x/n$)

$$\begin{aligned}\log(1+y) \;&\geq\; \frac{1}{(1+\frac{y}{2})}\left(y + \frac{y^3}{12(1+y)} - \frac{1}{360}(y^4 - \frac{y^4}{(1+y)^3})\right)\\ &= \frac{y}{(1+\frac{y}{2})}\cdot\left(1 + \frac{y^2}{12(1+y)} - \frac{1}{360}(y^3 - \frac{y^3}{(1+y)^3})\right).\end{aligned}$$

Es genügt, für die Ableitungen die entsprechende Ungleichung zu zeigen, also:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+y} \;&\geq\; \frac{1}{(1+\frac{y}{2})^2}\left(1 + \frac{y^2}{12(1+y)} - \frac{1}{360}(y^3 - \frac{y^3}{(1+y)^3})\right)\\ &+\; \frac{y}{(1+\frac{y}{2})}\left(\frac{2y+y^2}{12(1+y)^2} - \frac{1}{120}(y^2 - \frac{y^2}{(1+y)^4})\right).\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}1 + y + \frac{y^2}{4} \;\geq\; 1 + y + \frac{y^2}{4} &+ \frac{y^4}{24(1+y)} - \frac{y^3}{360}(1 + y - \frac{1}{(1+y)^2})\\ &- \frac{y^3 + \frac{1}{2}y^4}{120}\cdot\frac{4y + 6y^2 + 4y^3 + y^4}{(1+y)^3},\end{aligned}$$

und weiter äquivalent zu der für $0 \leq y$ offensichtlich richtigen Ungleichung

$$\begin{aligned}0 \;&\geq\; 15(1+y)^2 - (3 + 3y + y^2)(1+y) - (1 + \frac{y}{2})(12 + 18y + 12y^2 + 3y^3)\\ &= (15-25)y^2 - 10y^3 - \frac{3}{2}y^4.\end{aligned}$$

q.e.d.

Damit ist $d_n \geq d_{n+1}$ bewiesen, wir geben noch numerische Werte an:

$$n! \leq\; d_1 \cdot n^{(n+1/2)}e^{-n}e^{1/12n}e^{-1/360n^3},\quad d_1 = e^{(\frac{11}{12}+\frac{1}{360})} \approx 2.5079.$$

$$2.50662827 \approx S_\infty \leq d_n \leq d_4 = \frac{24e^4}{512}e^{-1/48+1/23040} \approx 2.506630\ .$$

Der Quotient der oberen und der unteren Abschätzung ist (für $n \geq 4$) bis auf Korrekturfaktoren $\leq \frac{2.506630}{2.506628} \approx 1.0000008$ konstant!

Eine Zufallsgröße P heißt Poisson verteilt, wenn gilt.

$$Prob(P = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Für Erwartungswert und Varianz gilt $E(P) = \lambda, \sigma^2 = \lambda$.
Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist die Zufallsgröße $G_\lambda := (P - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ für große λ (0,1)-normalverteilt. Wir rechnen das mit Hilfe der Stirlingschen Formel nach und finden $S_\infty = \sqrt{2\pi}$ aus dem Normierungsintegral der Gauß-Verteilung. Abkürzung: $k_\lambda = (k - \lambda)/\sqrt{\lambda}$.

$$\begin{aligned}
Prob(a \le G_\lambda \le b) &= \sum_{a \le (k-\lambda)/\sqrt{\lambda} \le b} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \approx \sum_{a \le (k-\lambda)/\sqrt{\lambda} \le b} \frac{\lambda^{k+1/2}}{S_\infty k^{k+1/2}} \frac{e^{k-\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \\
&= \sum_{a \le k_\lambda \le b} (1 + \frac{k-\lambda}{\lambda})^{-(k+1/2)} \cdot \frac{(e^{k_\lambda})^{\sqrt{\lambda}}}{S_\infty \sqrt{\lambda}} \\
&= \sum_{a \le k_\lambda \le b} \left((1 + \frac{k_\lambda}{\sqrt{\lambda}})^{-(k_\lambda + \sqrt{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}})} \cdot e^{k_\lambda} \right)^{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{S_\infty \sqrt{\lambda}}
\end{aligned}$$

Die Summationsvariable k_λ ändert sich gerade in Schritten der Größe $1/\sqrt{\lambda}$ und wir wollen den Grenzübergang $\lambda \to \infty$ ausführen; daher können wir die Summe als Riemannsumme eines Integrals auffassen. Dabei ersetzen wir noch die Summationsvariable k_λ durch die Integrationsvariable x. Damit haben wir die Hauptarbeit erledigt und bisher erreicht:

$$Prob(a \le G_\lambda \le b) \approx \frac{1}{S_\infty} \int_a^b dx \left((1 + \frac{x}{\sqrt{\lambda}})^{-(x + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\lambda})} \cdot e^x \right)^{\sqrt{\lambda}}.$$

Nun benutzen wir

$$\lim_{r\to\infty} (1 + \frac{x}{r})^{1/r} = 1, \quad \lim_{r\to\infty} (1 + \frac{x}{r})^{-rx} = \exp(-x^2)$$

und eine zunächst fremd aussehende Ungleichung (mit $r \ge 1 \ge x$)

$$\exp(-\frac{x^2}{2}) \le \left((1 + \frac{x}{r})^r \cdot e^{-x} \right)^r \le \exp(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3r}), \qquad (\bullet)$$

die aber äquivalent zu einer einfachen Taylorabschätzung für den Logarithmus ist, nämlich zu

$$-\frac{x^2}{2r^2} \leq \log(1+\frac{x}{r}) - \frac{x}{r} \leq -\frac{x^2}{2r^2} + \frac{x^3}{3r^3}.$$

($\bullet$) liefert

$$\lim_{r\to\infty} \Big((1+\frac{x}{r})^{-r} \cdot e^x\Big)^r = \exp(\frac{x^2}{2}),$$

und deshalb

$$\lim_{\sqrt{\lambda}\to\infty} \left((1+\frac{x}{\sqrt{\lambda}})^{-(x+\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}+\sqrt{\lambda})} \cdot e^x\right)^{\sqrt{\lambda}} = \exp(\frac{-x^2}{2}).$$

Damit ist

$$\lim_{\lambda\to\infty} Prob(a \leq G_\lambda \leq b) = \frac{1}{S_\infty} \int_a^b dx \exp(\frac{-x^2}{2})$$

bewiesen. Erstens bestätigt das den zentralen Grenzwertsatz am Beispiel der Poisson-Verteilung, vor allem aber folgt für die Stirling Formel:

$$S_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(\frac{-x^2}{2}) = \sqrt{2\pi}.$$