Klassifikation lokaler konformer Diffeomorphismen

1.) Triviale Vorbereitung:
F sei lokaler konformer Diffeomorphismus. Normiere F mit Hilfe von Translation, orthogonaler Abbildung und Streckung zu einem neuen lokalen konformen Diffeomorphismus F mit Fixpunkt $F(p) = p$ und Differential im Fixpunkt gleich **id**.

2.) Beispiele:
Die Komposition aus der Inversion an einer Sphäre und der Spiegelung an einer Tangentialebene der Sphäre ist eine wie eben normierte konforme Abbildung. Der Fixpunkt ist der Berührpunkt der Tangentialebene.

3.) Konforme Änderung der Metrik im Raum:
Betrachte die konforme Änderung $\tilde{g}(X,Y) := \lambda^{-2} g(X,Y)$. Dies wirkt sich außerordentlich einfach auf die Weingartenabbildung $S \cdot X := D_X N$ von Hyperflächen mit Einheitsnormalenfeld N aus:

$$\tilde{S} = \lambda \cdot S - d\lambda(N) \cdot \mathbf{id}.$$

Hieraus folgt erstens, dass Nabelhyperflächen ($S \sim \mathbf{id}$), also Hypersphären und Hyperebenen, in Nabelhyperflächen abgebildet werden.
Und zweitens folgt, dass wir mit Hilfe der Beispiele aus 2.) eine weitere Normierung unseres lokalen Diffeomorphismus F vornehmen können: Im Fixpunkt ändert sich auch die Weingartenabbildung nicht!
Für derart normierte F gilt jetzt: Jede Hyperebene und jede Hypersphäre durch den Fixpunkt p wird durch F auf sich selbst abgebildet. Das gilt dann auch für deren Durchschnitte. Speziell sind Geraden durch p invariant und weiter deren Durchschnitte mit Sphären durch p. Mit anderen Worten: F ist die Identität.

4.) Nachrechnen der Änderung der Weingartenabbildung:
Für den Differenztensor der beiden kovarianten Ableitungen gilt (z.B. mit Hilfe der Koszul-Formel):

$$\Gamma(X,Y) := \tilde{D}_X Y - D_X Y = \frac{-d\lambda(Y)}{\lambda} X + \frac{-d\lambda(X)}{\lambda} Y + g(X,Y) \frac{\mathrm{grad}_g \lambda}{\lambda}$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned}\tilde{S} \cdot X &= \tilde{D}_X \tilde{N} = D_X(\lambda \cdot N) + \Gamma(X, \lambda \cdot N)\\ &= d\lambda(X) \cdot N + \lambda S \cdot X - \frac{d\lambda(\lambda N)}{\lambda} X - \frac{d\lambda(X)}{\lambda} \lambda N + g(X, \lambda N) \frac{\mathrm{grad}\lambda}{\lambda}\\ &= \lambda S \cdot X - d\lambda(N) \cdot X.\end{aligned}$$