Analysis III

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 5.1, Mittelwertsatz (vgl. Königsberger, Analysis 2, 7.9 Aufg.7)

Seien $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, zusammenhängende Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

(a) Wir wissen schon aus früheren Übungen, daß das Bild kompakter, zusammenhängender Mengen unter stetigen Abbildungen wieder kompakt und zusammenhängend ist. Wiederholen Sie hier nochmal das Argument für den Zusammenhang.

(b) Zeigen Sie die folgenden Form des Mittelwertsatzes: Es gibt ein $\xi \in A$ mit der Eigenschaft

$$\int_A f(x) d^n x = f(\xi) v(A),$$

wobei $v(A)$ das Volumen von A ist.

Aufgabe 5.2, Achsenparallele Streckungen

(vgl. Königsberger, Analysis 2, 7.9 Aufg.5)

Diese Aufgabe behandelt einen Spezialfall des später folgenden Transformationssatzes. Wir definieren für $s_1, ..., s_n \in \mathbb{R} - \{0\}$ die achsenparallele Streckung $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$S(x) := \left(\frac{x_1}{s_1}, ..., \frac{x_n}{s_n} \right).$$

Zeigen Sie:

(a) Ist f integrierbar, so ist es auch $f \circ S$, und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x_1}{s_1}, ..., \frac{x_n}{s_n} \right) d^n x = \prod_{i=1}^{n} |s_i| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x$$

(b) Mit $A \subset \mathbb{R}^n$ ist auch $S^{-1}(A)$ meßbar, und es gilt:

$$v(S^{-1}(A)) = v(A) \prod_{i=1}^{n} |s_i|$$

(c) Berechnen Sie damit das Volumen eines dreidimensionalen Ellipsoids.

Aufgabe 5.3, Schwerpunkt und Trägheitsmoment, mit Fubini

(vgl. Königsberger, Analysis 2, 7.9 Aufg.5)

Für eine kompakte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ mit positivem Volumen definieren wir den Schwerpunkt $(S_1, ..., S_n)$ koordinatenweise durch die Formeln

$$S_i := \frac{1}{V} \int_A x_i \; d^n x$$

Für $A \subset \mathbb{R}^3$ definieren wir das Trägheitsmoment um die z-Achse durch

$$\theta_z(A) := \int_A (x^2 + y^2) d(x, y, z).$$

Analog für die anderen Koordinatenachsen.

(a) Berechnen Sie mit Fubini den Schwerpunkt des Halbkreises $\{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

(b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Vollzylinders mit Radius 1 und der Länge h um die Symmetrieachse und um eine Achse senkrecht dazu. Schneiden Sie den Zylinder parallel zur Achse und verwenden Sie Fubini.

Aufgabe 5.4, Basis für k-Formen und äußere Ableitung

Hinweis: Wir sind bei den Koordinatenfunktionen des $\mathbb{R}^n$ etwas mehr an untere Indices x_j als an obere x^j gewöhnt, da man die letzteren mit Exponenten verwechseln kann. Beim Umgang mit Differentialformen (und den Tensorindices der Physiker) haben die Koordinatenfunktionen obere Indices, $v = \sum x^j e_j$, die Koeffizienten der Formen haben untere, $\omega = \sum \omega_j dx^j$. Obere Indices gehören zu Spaltenmatrizen, untere zu Zeilenmatrizen.

(a) Zeigen Sie, daß die Menge $\{dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} | 1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n\}$ eine Basis der k-Formen auf $\mathbb{R}^n$ ist.
(b) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\omega := f dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Alt}^r(\mathbb{R}^n)$. Berechnen Sie die Ableitung $T\omega$. Vergleichen Sie $df \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$ und die Schiefsymmetrisierung von $T\omega$, also

$$(T\omega)^{Alt}(v_0, \ldots, v_k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j T_{v_j} \omega(v_0, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_k).$$

$(T\omega)^{Alt} =: d\omega$ heißt *äußere Ableitung* von ω.