Analysis III

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

Ich hoffe, Königsberger II, Abschnitte 6.1, 6.2, und was ich zum Cauchyschen Integralsatz gesagt habe, überzeugen Sie davon, daß Integralsätze weitreichende Konsequenzen haben. — Einen großen Teil von Kapitel 5 habe ich schon einmal erzählt, es folgt jetzt ein zweiter Durchgang. Das Ziel der Aufgaben ist, daß Sie danach die Anfangsdefinitionen als einfach ansehen.

Erinnerung: Die Symbole dx_j bezeichnen die Differentiale der (linearen) Koordinatenfunktionen $x_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, für die natürlich eine Basis $\{e_1, \ldots, e_d\}$ von $\mathbb{R}^d$ vorausgesetzt ist. Die $dx_j|_p$ sind unabhängig vom Fußpunkt p, sie sind Dualbasis von $\{e_1, \ldots, e_d\}$. Differentialformen $\omega : \mathbb{R}^d \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ sind daher Linearkombinationen der Basisdifferentiale, aber mit (k-mal differenzierbaren) Funktionen $\omega_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ als Koeffizienten:

$$\omega|_p = \sum_{j=1}^{d} \omega_j(p) dx_j|_p.$$

Für 1-Formen $l_1, l_2 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ ist deren schiefes Produkt $l_1 \wedge l_2$ definiert durch:

$$l_1 \wedge l_2(u, v) := l_1(u) l_2(v) - l_1(v) l_2(u), \ u, v \in \mathbb{R}^d.$$

Aufgabe 2.1 Äußere Ableitung, Definition und Basisdarstellung

Sei $p \mapsto \omega|_p := \sum_{j=1}^{d} \omega_j(p) dx_j|_p$ eine 1-Form. Zeigen Sie, daß

$$d\omega|_p(u, v) := T_u \omega|_p(v) - T_v \omega|_p(u)$$

die Basisdarstellung

$$= \sum_{j=1}^{d} d\omega_j|_p \wedge dx_j|_p(u, v)$$

hat.

Aufgabe 2.2 Große Worte

Zeigen Sie, daß die k-mal differenzierbaren 1-Formen einen Modul über dem Ring der k-mal differenzierbaren Funktionen bilden. Zeigen Sie, daß die geschlossenen Formen (*Erinnerung*: $d\omega = 0$) keinen Untermodul bilden, wohl aber eine Untergruppe.

Aufgabe 2.3 Cauchyscher Integralsatz, reell geschrieben

Die über $\mathbb{R}$ angegebenen Definitionen werden über $\mathbb{C}$ gleichlautend verwendet. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion und $\omega := f dz$ ihr Differential.

(a) Zeigen Sie erstens mit komplexer Notation: $\quad d\omega = 0.$

(b) Lehrreicher ist der Vergleich mit den reellen Formeln: Definieren Sie

$$u(x,y) := \mathrm{Re}\, f(x+\mathbf{i}y),\ v(x,y) := \mathrm{Im}\, f(x+\mathbf{i}y),\ dz := dx + \mathbf{i}dy.$$

Zeigen Sie damit:

$$f dz = (udx - vdy) + \mathbf{i}(vdx + udy) \ \text{ und } \ d(udx - vdy) = 0,\ d(vdx + udy) = 0.$$

Natürlich muß zusätzlich zur reellen Differenzierbarkeit die komplexe Differenzierbarkeit, also zusätzlich $\frac{d}{dt} f(z + t\mathbf{i}h)|_{t=0} = \mathbf{i}\frac{d}{dt} f(z+th)|_{t=0}$, benutzt werden.

Aufgabe 2.4 Kurvenintegrale

Da die ersten drei Aufgaben kurze Antworten haben, bearbeiten Sie bitte alle Teile dieser Aufgabe zur Integration von 1-Formen.
Betrachten Sie die 1-Formen

$$\omega_1|_{(x,y)} = xdy,\quad \omega_2|_{(x,y)} = -ydx,\quad \omega_3|_{(x,y)} = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2},\quad \omega_4|_{(x,y)} = \frac{xdx + ydy}{x^2+y^2}.$$

(a) Berechnen Sie erstens die äußeren Ableitungen und zweitens die Kurvenintegrale längs Kreisen $c_r(t) = (r \cdot \cos(t),\ r \cdot \sin(t))$.
Schreiben Sie kurze Begründungen, *warum* in den ersten beiden Fällen die Integrale vom Radius abhängen, in den letzten beiden Fällen nicht. Warum erwarten Sie, Stammfunktionen f, g mit $df = \omega_4,\ dg = \omega_1 - \omega_2$ zu finden? Geben Sie solche f, g an.

(b) Nachdem Sie beobachtet haben, daß in den ersten beiden Fällen das Integral den umschlossenen Flächeninhalt ergibt, integrieren Sie ω_1, ω_2 auch noch über den Rand achsenparaller Rechtecke der Seitenlängen a, b.