Prof. Dr. Jens Franke
Jan Büthe

Übungsblatt 9

Abgabe am 8.1.2014
in der Vorlesung

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)^2}{t^4 + 5t^2 + 4}\, dt$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $> r > 0$. Zeigen Sie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{i\phi}) \right|^2 d\phi \leq \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|^2.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Gleichung $\left| f(z_0 + re^{i\phi}) \right|^2 = \sum \overline{a_n} f(z_0 + re^{i\phi}) r^n e^{-i\phi n}$ und Satz 5 (Mittelwerteigenschaft) aus der Vorlesung.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie die folgende Aussage: Wenn $|f|$ in U ein lokales Maximum hat, so ist f auf U konstant. Insbesondere gilt somit für beschränkte U

$$\max_{z \in \overline{U}} |f(z)| = \max_{z \in \partial U} |f(z)|.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Seien U und f wie in Aufgabe 3. Zeigen Sie die folgende Aussage. Wenn $\Re f$ oder $\Im f$ in U ein lokales Maximum oder Minimum hat, so ist f in U konstant.
Hinweis: Nutzen Sie die Exponentialfunktion.