Minisymposium 27

Computeralgebra

Leiter des Symposiums:

Prof. Dr. Wolfram Koepf
Fachbereich Mathematik / Informatik
Universität Kassel
Heinrich-Plett-Str. 40
34132 Kassel, Germany

Prof. Dr. Gerhard Hiß
Lehrstuhl D für Mathematik
RWTH Aachen
Templergraben 64
52062 Aachen, Germany

Dieses Minisymposium soll einen kleinen Einblick in eine Auswahl aktueller Themen der Computeralgebra vermitteln. In einem je 50-minütigen Übersichtsvortrag berichten Anne Frühbis-Krüger über SINGULAR, einem der weltweit anerkanntesten Computeralgebrasysteme zur algebraischen Geometrie, Bettina Eick über neueste Entwicklungen in der algorithmischen Gruppentheorie sowie Ulrich Kortenkamp, einer der beiden Autoren von CINDERELLA, über die Integration von Computeralgebrasystemen und dynamischer Geometrie-Software.

Daneben wird es sechs 20-minütige Forschungsberichte geben. Diese entstammen so verschiedenen Disziplinen wie der algebraischen Kontrolltheorie, der homologischen Algebra, der algorithmischen Darstellungstheorie, der algorithmischen Kombinatorik sowie der algorithmischen algebraischen Zahlentheorie.

Donnerstag, 21. September

Großer Hörsaal, Mathematisches Institut, Wegelerstr. 10

15:00 – 15:50 **Anne Frühbis-Krüger** *(Kaiserslautern)*
Neuere Features des Computeralgebrasystems SINGULAR

16:00 – 16:20 **Eva Zerz** *(Aachen)*
Zur Umsetzung kontrolltheoretisch relevanter Algorithmen in der SINGULAR Control Library

---

16:30 – 16:50 **Mohamed Barakat** *(Aachen)*
homalg – Ein abstraktes Maple-Paket für homologische Algebra

17:00 – 17:20 **Daniel Robertz** *(Aachen)*
Janet-Algorithmus mit Anwendungen in der Kontrolltheorie

17:20 – 17:50 **Gerhard Hiß** *(Aachen)*
Rechnen mit sporadischen Gruppen

Freitag, 22. September

Großer Hörsaal, Mathematisches Institut, Wegelerstr. 10

15:00 – 15:50 **Bettina Eick** *(Braunschweig)*
Algorithmische Gruppentheorie

16:00 – 16:20 **Wolfram Koepf** *(Kassel)*
Multivariate algorithmische Summation

16:30 – 16:50 **Gunter Malle** *(Kaiserslautern)*
Zählen von Zahlkörpern

17:00 – 17:50 **Ulrich Kortenkamp** *(Schwäbisch Gmünd)*
Integration von CAS und DGS – Wege und Konsequenzen

Vortragsauszüge

Anne Frühbis-Krüger *(Kaiserslautern)*
Neuere Features des Computeralgebrasystems SINGULAR

In der letzten Zeit ist die Funktionalität des Computeralgebrasystems SINGULAR um einige interessante Features erweitert worden. Dazu gehören unter anderem Absolute Primärzerlegung, Auflösung von Singularitäten und Nicht-Kommutative Berechnungen. Anhand von Beispielen und konkreten Anwendungen illustriert der Vortrag diese Themenbereiche – mit Ausnahme der nicht-kommutativen Features, deren Darstellung dem direkt anschließenden Vortrag von Frau Zerz überlassen bleibt.

Eva Zerz *(Aachen)*
Zur Umsetzung kontrolltheoretisch relevanter Algorithmen in der SINGULAR Control Library

Gegenstand der Kontrolltheorie ist die gezielte Beeinflussung (Steuerung) dynamischer Systeme; diese sind durch Differential- oder Differenzengleichungen gegeben und sollen durch geeignete Wahl von Stellgrößen und freien Parametern zu einem bestimmten erwünschten Verhalten veranlasst werden.

Der Ansatz der "Algebraischen Analysis" ermöglicht es, die relevanten kontrolltheoretischen Eigenschaften eines linearen Systems in algebraische Eigenschaften eines zugeordneten Moduls über dem (nicht notwendigerweise kommutativen) Ring der Differentialoperatoren zu übersetzen.

Die auftretenden algebraischen Objekte lassen sich mit Hilfe des Computeralgebrasystems SINGULAR (und im nichtkommutativen Fall mit seiner Erweiterung PLURAL) effizient manipulieren und analysieren. Die Resultate dieser Berechnungen können dann in die Sprache der Systemtheorie rückübersetzt und somit interpretiert werden. Der Vortrag stellt eine SINGULAR-basierte Programmbibliothek zur systematischen Umsetzung dieser Routinen vor und beleuchtet ihre theoretischen Hintergründe.

Mohamed Barakat *(Aachen)*
homalg – Ein abstraktes Maple-Paket für homologische Algebra

Homologische Algebra ist eine natürliche Erweiterung der Theorie von Moduln über Ringen. Die Kategorie der Moduln und deren Homomorphismen wird durch die Kategorie der Kettenkomplexe von Moduln und deren Kettenabbildungen ersetzt. Ein Modul wird repräsentiert durch eine seiner Auflösungen. Den Modul gewinnt man wiederum als die einzige nichttriviale Homologie seiner Auflösung. Alle Auflösungen eines Moduls sind in einem exakten Sinne äquivalent. Die Rolle der Kerne und Kokerne in der abelschen Kategorie der Moduln wird in der Kategorie der Komplexe durch sogenannte exakte Dreiecke übernommen. Dabei ist der Begriff des verbindenden Homomorphismus und der daraus resultierenden langen exakten Homologie-Sequenz von zentraler Bedeutung.
Das Maple-Paket homalg ist ein Versuch diese Begriffe handhabbar zu machen. Das Paket ist ein abstraktes Paket, das unabhängig von der Ringarithmetik die üblichen Konstruktionen der homologischen Algebra zur Verfügung stellt. Spezifiziert man einen Ring, in dem man Linksidealmitgliedschaft algorithmisch entscheiden kann, so stehen diese Konstruktionen auf einen Schlag zur Verfügung.
Der zentrale Begriff der homologischen Algebra ist der Begriff des Funktors. In homalg sind diverse grundlegende Funktoren implementiert, woraus man durch Derivation bzw. Komposition andere komplexere gewinnt. All diese Aspekte werden im Vortrag angesprochen und einige Anwendungen vorgestellt.

Daniel Robertz *(Aachen)*
Janet-Algorithmus mit Anwendungen in der Kontrolltheorie

Der Janet-Algorithmus ist im Kontext von (linearen) Differentialgleichungen und polynomialen Gleichungssystemen bekannt. Ausgehend von einem endlichen Erzeugendensystem für einen Teilmodul eines freien Moduls über einem kommutativen Polynomring bzw. einem differentiellen Ring berechnet er ein Erzeugendensystem für den gleichen Modul, mit welchem man Modulmitgliedschaft entscheiden, im zugehörigen Restklassenmodul rechnen und sogar eine freie Auflösung des Restklassenmoduls überblicken kann. In diesem Vortrag wird gezeigt, wie sich der Algorithmus in einfacher Weise auf eine gewisse Klasse von Schiefpolynomringen erweitern lässt. Damit lassen sich dann z. B. auch Systeme von linearen Differenzengleichungen und Kombinationen mit Differentialgleichungen entsprechend behandeln. Die verallgemeinerte

Hilbert-Reihe wird als kombinatorisches Hilfsmittel vorgestellt und ihre Bedeutung für die Aufzählung von formalen Lösungen der betrachteten Gleichungssysteme erklärt. Anwendungen von Maple-Implementationen des Janet-Algorithmus auf Probleme der Kontrolltheorie schließen sich an.

Gerhard Hiß *(Aachen)*
Rechnen mit sporadischen Gruppen

Die 26 sporadischen Gruppen sind endliche einfache Gruppen, die sich keiner unendlichen Serie zuordnen lassen. Die kleinste davon ist die *Mathieu-Gruppe* M_{11} mit 7920, die größte das *Monster* mit etwa $8 \cdot 10^{53}$ Elementen.
Zwei nahe liegende Projekte schließen sich an die Entdeckung und Konstruktion der sporadischen Gruppen an: Die Bestimmung ihrer maximalen Untergruppen und irreduziblen Darstellungen. Während das erste davon nahezu abgeschlossen ist, gibt es beim zweiten noch viel zu tun. In beiden Fällen ist es notwendig, explizit in diesen Gruppen zu rechnen, wobei geeignete Permutations- oder Matrix-Darstellungen verwendet werden. Dies ist beim Monster eine Matrix-Darstellung vom Grad 196882 über dem Körper mit 2 Elementen. Eine einzige solche Matrix beansprucht einen Speicherplatz von etwa 5GB.
In meinem Vortrag will ich zunächst über den Kenntnisstand in den beiden Projekten berichten. Danach werde ich einige Methoden vorstellen, die irreduziblen Matrix-Darstellungen über endlichen Körpern einer gegebenen endlichen Gruppe explizit zu bestimmen. Dabei will ich die oben schon angedeuteten Probleme mit sehr großen Permutations- und Matrix-Darstellungen erläutern und Ideen zu ihrer Überwindung aufzeigen.

Bettina Eick *(Braunschweig)*
Algorithmische Gruppentheorie

In diesem Vortrag wird eine Übersicht über aktuelle Themen in der algorithmischen Gruppentheorie gegeben. Methoden in der Gruppentheorie basieren wesentlich auf der gegebenen Darstellung der betrachteten Gruppe. Die Hauptdarstellungen von Gruppen sind dabei Matrixgruppen, Permutationsgruppen und endlich präsentierte Gruppen. In dem Vortrag wird zu jedem dieser Themen eine kurze Übersicht über den Stand der Technik und über mögliche Anwendungen vorgestellt.

Wolfram Koepf *(Kassel)*
Multivariate algorithmische Summation

Während univariate Reihen der Form $S_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n,k)$ für hypergeometrische Terme $F(n,k)$, für welche also $F(n+1,k)/F(n,k) \in \mathbb{Q}(n,k)$ und $F(n,k+1)/F(n,k) \in \mathbb{Q}(n,k)$ gilt, durch einen Algorithmus von Zeilberger (1991) sehr effizient vereinfacht werden können – dies heißt konkret, der Algorithmus berechnet eine Rekursion und hieraus ggfs. eine geschlossene Formel für S_n –, ist die Vereinfachung im multivariaten Fall i. a. wesentlich komplizierter und die bekannten Algorithmen sind weit weniger effizient.
Wir stellen in diesem Vortrag die zugrunde liegende Theorie vor, die ursprünglich von Celine Fasenmyer stammt (1945), von Wilf und Zeilberger wieder aufgegriffen wurde (1994), aber erst in einer Diplomarbeit von Wegschaider (1997) durch wesentliche neue Ideen implementierfähig gemacht und von Sprenger (2005) in *Maple* implementiert wurde. Wir zeigen an einigen Anwendungsbeispielen die Funktionalität unserer *Maple*-Implementierung.

Gunter Malle *(Kaiserslautern)*
Zählen von Zahlkörpern

Hauptgegenstand des Vortrags ist die Anzahl von Zahlkörpern mit fester Galoisgruppe und beschränkter Absolut-Diskriminante. Wir stellen eine genaue Vermutung über das asymptotische Verhalten dieser Anzahlfunktionen vor, die bisher aber nur in einigen wenigen Spezialfällen bewiesen werden konnte. Diese Vermutung entstand auf der Basis umfangreicher Körpertabellen, die mit Hilfe von Computeralgebrasystemen erstellt wurden. Wir werden kurz über diese Berechnungen, aber auch über theoretische Resultate berichten, die auch Verbindungen zu anderen offenen Fragen in der Zahlentheorie herstellen.

Ulrich Kortenkamp *(Schwäbisch Gmünd)*
Integration von CAS und DGS – Wege und Konsequenzen

Computeralgebrasystem (CAS) und Dynamische Geometrie-Software (DGS) haben ihren Platz im Schulunterricht gefunden. Die weitere Verbreitung dieser Werkzeuge scheint nur noch eine Frage der Rechnerausstattung an Schulen und den dazu gehörenden Fortbildungen zu sein. Somit ist es an der Zeit, die existierenden Werkzeuge kritisch zu hinterfragen!

Für einen reibungslosen Einsatz liegt es nahe, beide Ansätze zu integrieren und eine gemeinsame Lehr/Lernplattform für Mathematik zu schaffen. Im Vortrag möchte ich einen Überblick über bereits existierende Lösungen geben und die verschiedenen Ansätze diskutieren. Aus den Wünschen an die Bedienbarkeit der Software entstehen neue mathematische Probleme, es ergeben sich aber auch neue, didaktisch verwertbare Gestaltungsmöglichkeiten, die die Mathematik-Lehre verändern können.