Zur Umsetzung kontrolltheoretisch relevanter Algorithmen in der SINGULAR Control Library

Eva Zerz, RWTH Aachen

Viktor Levandovskyy, RISC Linz

gefördert vom Forschungsschwerpunkt
“Mathematik und Praxis” des Landes Rheinland-Pfalz

DMV Jahrestagung 2006

Überblick

- **Algebraische Analysis**
- **Systemtheoretische Eigenschaften**
  - Autonomie
  - Steuerbarkeit
- **Anwendungsgebiete**
  - lineare partielle Dgl. mit konstanten Koeffizienten
  - lineare gew. Dgl. mit rationalen (merom.) Koeffizienten
  - parameter-abhängige Systeme linearer gew. Dgl.
- **Implementierung**

Algebraische Analysis

- **(Differential-) Operatoren**
  $\mathcal{D}$ . . . ein Ring (mit 1), links Noethersch

- **Signale (Funktionenraum)**
  $\mathcal{A}$ . . . $\mathcal{D}$-Linksmodul

- **Abstraktes lineares System**

$$\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{A}^q \mid Rw = 0\}$$

- **Darstellung**

$$R \in \mathcal{D}^{g \times q}$$

Malgrange-Isomorphismus

Abstraktes lineares System $\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{A}^q \mid Rw = 0\}$

System-Modul $\mathcal{M} = \mathcal{D}^{1\times q}/\mathcal{D}^{1\times g}R$

Dann gilt: $\mathcal{B} \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$

$\mathcal{A}$ ist **injektiver Kogenerator** $\Leftrightarrow$
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\cdot, \mathcal{A})$ ist **exakt und treu,** d.h.

$$\mathcal{M} \to \mathcal{N} \to \mathcal{P} \text{ exakt } \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{N}, \mathcal{A}) \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{P}, \mathcal{A}) \text{ exakt}$$

$\mathcal{A}$ injektiv $\Rightarrow$

Fundamentalprinzip: $P \in \mathcal{D}^{g\times p}$, $Q \in \mathcal{D}^{h\times g}$

Wenn $\ker(\cdot P) = \operatorname{im}(\cdot Q)$, so gilt $\forall v \in \mathcal{A}^g$:

$$\exists y \in \mathcal{A}^p : Py = v \quad \Leftrightarrow \quad Qv = 0$$

Lösbarkeitstest für $Py = v$
(Existenz von Q ... $\mathcal{D}$ links Noethersch)

$\mathcal{D}^{1\times h} \xrightarrow{\cdot Q} \mathcal{D}^{1\times g} \xrightarrow{\cdot P} \mathcal{D}^{1\times p}$ exakt $\Rightarrow$
$\mathcal{A}^h \xleftarrow{Q} \mathcal{A}^g \xleftarrow{P} \mathcal{A}^p$ exakt

$\mathcal{A}$ injektiver Kogenerator $\Rightarrow$

Inklusion abstrakter linearer Systeme:

$$\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists X \in \mathcal{D}^{g_2 \times g_1} : R_2 = X R_1$$

Charakterisierung der Nichteindeutigkeit der Darstellung

$0 \to \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ exakt $\Rightarrow$
$0 \leftarrow \mathcal{M}_1 \leftarrow \mathcal{M}_2$ exakt

Beispiele injektiver Kogeneratoren

- **Partielle und gew. Dgl. mit konst. Koeff.**
  $\mathcal{D} = \mathbb{K}[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ und
  $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}), \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}), \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$
  [Ehrenpreis, Palamodov, Malgrange, Oberst]

- **Partielle und gew. Differenzengl. mit konst. Koeff.**
  $\mathcal{D} = C[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ und $\mathcal{A} = C^{\mathbb{N}^n}$
  $\mathcal{D} = C[\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma_1^{-1}, \ldots, \sigma_n^{-1}]$ und $\mathcal{A} = C^{\mathbb{Z}^n}$
  C ... Quasi-Frobenius-Ring (z.B. Körper, $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$)
  [Oberst,Z]

- **Gew. Dgl. mit rationalen (meromorphen) Koeff.**
  $\mathcal{D} = K[\frac{d}{dt}]$ und $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty_{ae}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$
  K ... rationale (meromorphe) Fkt. [Z]

Systemtheoretische Eigenschaften

Bisher: $\mathcal{D}$ links Noethersch
$\mathcal{A}$ injektiver Kogenerator
Zusätzlich: $\mathcal{D}$ ist Bereich

Autonomie

Abstraktes lineares System $\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{A}^q \mid Rw = 0\}$

Projektion auf die i-te Komponente $\pi_i : \mathcal{B} \to \mathcal{A}, \quad w \mapsto w_i$

$\mathcal{B}$ **autonom** $\Leftrightarrow$ kein π_i ist surjektiv
d.h., es gibt keine freien Variablen (Inputs)

π_i surjektiv $\Leftrightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{\pi_i} \mathcal{A} \longrightarrow 0$ exakt $\Leftrightarrow \mathcal{M} \longleftarrow \mathcal{D} \longleftarrow 0$ exakt

Satz: [Pommaret & Quadrat] Äquivalent:

- $\mathcal{B}$ ist autonom
- $\mathcal{M}$ ist Torsionsmodul
- R hat vollen Spaltenrang

Rang:

$\mathcal{D}$ links Noethersch $\Rightarrow$ $\mathcal{D}$ hat linke Ore-Eigenschaft $\Rightarrow$
$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{K}$ Schiefkörper von Linksbrüchen

$$\mathcal{K} = \{d^{-1}n \mid d \neq 0, n \in \mathcal{D}\}$$

Für $R \in \mathcal{D}^{g \times q}$:

$$\mathrm{Rang}(R) = \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^{1 \times g} R = \dim_{\mathcal{K}} R\mathcal{K}^q$$

Steuerbarkeit

Zusatzannahme: $\mathcal{D}$ rechts Noethersch

$\mathcal{B}$ **steuerbar** $\Leftrightarrow \exists L \in \mathcal{D}^{q \times l}$:

$$\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{A}^q \mid \exists \ell \in \mathcal{A}^l : w = L\ell\}$$

Satz: [Pommaret & Quadrat] Äquivalent:

- $\mathcal{B}$ ist steuerbar
- $\mathcal{M}$ ist torsionsfrei
- R ist linke **Syzygienmatrix,** d.h., $\exists L : \mathrm{im}(\cdot R) = \ker(\cdot L)$

$\mathcal{D}^{1 \times g} \xrightarrow{\cdot R} \mathcal{D}^{1 \times q} \xrightarrow{\cdot L} \mathcal{D}^{1 \times l}$ exakt $\Leftrightarrow \mathcal{A}^g \xleftarrow{R} \mathcal{A}^q \xleftarrow{L} \mathcal{A}^l$ exakt

Partielle Dgl.

$\mathcal{D} = \mathbb{K}[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ kommutativ, $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$

Satz: [Pillai & Shankar]

$\mathcal{B}$ **autonom** $\Leftrightarrow$ es gibt kein $0 \neq w \in \mathcal{B}$ mit kompaktem Träger

$\mathcal{B}$ **steuerbar** $\Leftrightarrow \forall w_1, w_2 \in \mathcal{B}\ \forall U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \emptyset$
$\exists w \in \mathcal{B}$

$$w(x) = \begin{cases} w_1(x) & \text{falls } x \in U_1 \\ w_2(x) & \text{falls } x \in U_2 \end{cases}$$

Diskreter Fall: Analoge Charakterisierungen für Koeff. in Körper [Rocha, Valcher, Z, ...],
feinere für Koeff. in $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ [Kuijper, Z,...]

Zeitvariante lineare Systeme

$\mathcal{D} = K[\frac{d}{dt}]$
K ... Körper der rationalen (meromorphen) Funktionen
$\mathcal{D}$ ist **einfacher** Hauptidealbereich, nicht kommutativ

$$\frac{d}{dt}k - k\frac{d}{dt} = k'$$

Jacobson-Form: Für alle R existieren unimodulare U, V so dass

$$URV = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wobei $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_p)$ und $p = \mathrm{Rang}(R)$

$\mathcal{D}$ **einfach** $\Rightarrow$ oBdA: $d_1 = \ldots = d_{p-1} = 1$
$\mathcal{D}$ ist sogar Euklidisch $\Rightarrow U, V$ via elementare Zeilen- und Spalten-umformungen

$\mathcal{A} = \mathcal{C}^{\infty}_{ae}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ . . . Funktionen, die außerhalb einer endlichen (diskreten) Menge glatt sind

Satz: $\mathcal{A}$ ist injektiver Kogenerator

Folgerungen aus der Jacobson-Form:

- Jedes $\mathcal{B}$ hat eine Darstellung mit vollem Zeilenrang
- $\mathcal{B}$ ist **autonom** $\Leftrightarrow$ es gibt eine quadratische Darstellung mit vollem Rang
- $\mathcal{B}$ ist **steuerbar** $\Leftrightarrow$ es existiert eine rechts invertierbare Darstellung
- $\mathcal{B} = \mathcal{B}^a \oplus \mathcal{B}^c$, wobei $\mathcal{B}^c$ das **größte steuerbare Teilsystem** von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}^a$ autonom ist

Parameter-abhängige gew. Dgl.

$\mathcal{D} = \mathbb{K}[p_1, \ldots, p_N][\frac{d}{dt}]$

$\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{A}^q \mid Rw = 0\}$ ... parametrisierte Familie von gew. Dgl.

Annahme: $\mathcal{B}$ **generisch steuerbar,** d.h., R hat Rechtsinverse über $\mathbb{K}(p_1, \ldots, p_N)[\frac{d}{dt}] \Rightarrow \mathcal{B}$ steuerbar für fast alle Parameterwerte

Berechne alle $d \in \mathbb{K}[p_1, \ldots, p_N]$ mit $\exists X : RX = dI$
(also $I = \mathrm{ann}(\mathcal{D}^g / R\mathcal{D}^q) \cap \mathbb{K}[p_1, \ldots, p_N]$)

$\Rightarrow$ System ist steuerbar für alle p mit $\exists d \in I : d(p) \neq 0$
(also außerhalb von $\mathcal{V}(I)$)

kritische Parameterkonstellationen, in denen eine generisch steuerbare Systemfamile unsteuerbar werden kann

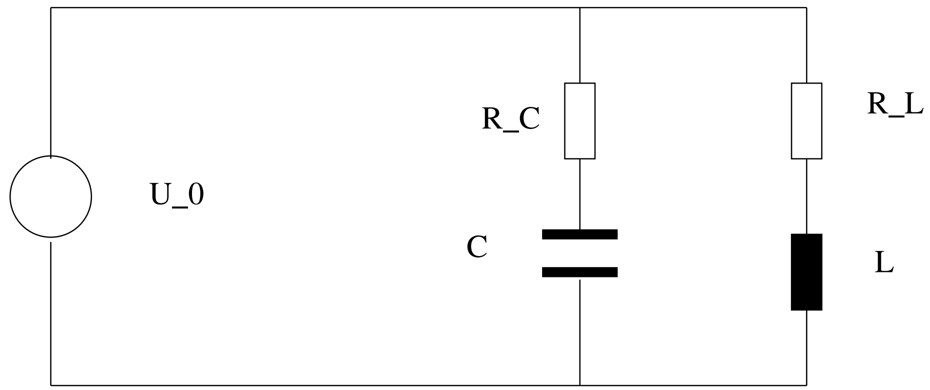
Implementierungen

Maple-Paket OreModules von A. Quadrat, D. Robertz et al.
`http://wwwb.math.rwth-aachen.de/OreModules`

Singular Control Library von V. Levandovskyy, E. Zerz et al.
`http://www.math.rwth-aachen.de/~Eva.Zerz/CLIPS`

- benutzerfreundlich: automatischer Test diverser Steuerbarkeitseigenschaften mit einem einzigen Befehl
- systematische Behandlung unterschiedlicher Systemklassen in einheitlicher Plattform
- Nutzung der effizienten Gröbnerbasen-Implementierung von SINGULAR
- freie Software, Kompatibilität mit früheren Versionen, Transparenz, Dokumentation . . .

Ein Spielzeugbeispiel



$I = I_L + I_C$, $U_0 = U_1 + U_2 = U_3 + U_4$, $U_2 = R_C I_C$, $U_4 = R_L I_L$, $L \frac{d}{dt} I_L = U_3$, $C \frac{d}{dt} U_1 = I_C$

7 Gleichungen, 8 Unbekannte, 4 Parameter

steuerbar genau dann wenn $C R_C R_L \neq L$