Der Janet-Algorithmus mit Anwendungen in der Kontrolltheorie

Daniel Robertz

Lehrstuhl B für Mathematik

RWTH Aachen

Überblick

- Janet-Algorithmus
- Ore-Algebren
- Verallgemeinerte Hilbert-Reihe
- Anwendung auf Kontrolltheorie
- Beispiele in Maple . . .

Janet-Algorithmus

- Maurice Janet (1920er Jahre)
- strukturelle Analyse von Systemen von (linearen) partiellen Differentialgleichungen
- z.B. Parametrisierung aller Potenzreihenlösungen

Janet-Algorithmus

- Maurice Janet (1920er Jahre)
- strukturelle Analyse von Systemen von (linearen) partiellen Differentialgleichungen
- z.B. Parametrisierung aller Potenzreihenlösungen
- *Janet-Basis*
  - definiert Normalformen für die (linken Seiten der) Gleichungen

Janet-Algorithmus

- Maurice Janet (1920er Jahre)
- strukturelle Analyse von Systemen von (linearen) partiellen Differentialgleichungen
- z.B. Parametrisierung aller Potenzreihenlösungen
- *Janet-Basis*
  - definiert Normalformen für die (linken Seiten der) Gleichungen
  - partitioniert die Taylor-Koeffizienten in prinzipale und parametrische

Janet-Algorithmus

Polynomialer Fall: $I \trianglelefteq R := K[x_1, \ldots, x_n]$

Janet-Algorithmus

Polynomialer Fall: $I \trianglelefteq R := K[x_1, \ldots, x_n]$

Differentialgleichungen mit konst. Koeff.	$\leftrightarrow$	polynomiale Gleichungen
$\dfrac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}$	$\leftrightarrow$	$x\,y^2$

Janet-Algorithmus

Polynomialer Fall: $I \trianglelefteq R := K[x_1, \ldots, x_n]$

Differentialgleichungen mit konst. Koeff.	$\leftrightarrow$	polynomiale Gleichungen
$\dfrac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}$	$\leftrightarrow$	$x\,y^2$

Janet-Basis von I: Rechnungen im Restklassenring R/I

Janet-Algorithmus

Polynomialer Fall: $I \trianglelefteq R := K[x_1, \ldots, x_n]$

Differentialgleichungen mit konst. Koeff.	$\leftrightarrow$	polynomiale Gleichungen
$\dfrac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}$	$\leftrightarrow$	$x\,y^2$

Janet-Basis von I: Rechnungen im Restklassenring R/I

Der *Janet*-Alg. verallgemeinert gleichzeitig den *Euklid*ischen und den *Gauß*-Alg.

Janet-Algorithmus

Polynomialer Fall: $I \trianglelefteq R := K[x_1, \ldots, x_n]$

Differentialgleichungen mit konst. Koeff.	$\leftrightarrow$	polynomiale Gleichungen
$\dfrac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}$	$\leftrightarrow$	$x\,y^2$

Janet-Basis von I: Rechnungen im Restklassenring R/I

Der *Janet*-Alg. verallgemeinert gleichzeitig den *Euklid*ischen und den *Gauß*-Alg.

Bem.: Jede Janet-Basis ist eine Gröbner-Basis.

Vielfachen-abgeschl. Mengen von Monomen

$\mathbb{M} := \mathrm{Mon}(x_1, \ldots, x_n) := \{x^i \mid i \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n\}$

$S \subseteq \mathbb{M}$ heißt $\mathbb{M}$-*vielfachen-abgeschlossen* ($\mathbb{M}$-vf.-abg.), wenn

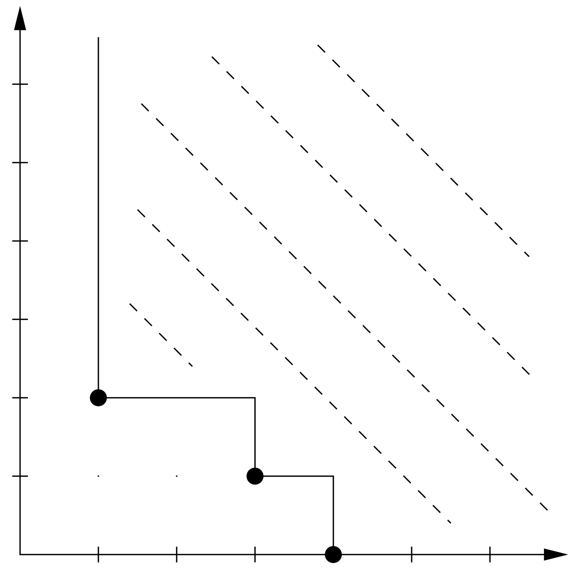
$$m\,s \in S \quad \forall\, m \in \mathbb{M},\ s \in S$$

Vielfachen-abgeschl. Mengen von Monomen

$$\mathbb{M} := \mathrm{Mon}(x_1, \ldots, x_n) := \{x^i \mid i \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n\}$$

$S \subseteq \mathbb{M}$ heißt $\mathbb{M}$-*vielfachen-abgeschlossen* ($\mathbb{M}$-vf.-abg.), wenn

$$m\, s \in S \quad \forall\, m \in \mathbb{M},\ s \in S$$



$\mathbb{M}$-vf.-abg. Menge
erzeugt von $x_1 x_2^2$, $x_1^3 x_2$, x_1^4

Vielfachen-abgeschl. Mengen von Monomen

Lemma. *Jede* $\mathbb{M}$*-vf.-abg. Menge* $S \subset \mathbb{M}$ *ist endlich erzeugt.*

Vielfachen-abgeschl. Mengen von Monomen

Lemma. *Jede* $\mathbb{M}$*-vf.-abg. Menge* $S \subset \mathbb{M}$ *ist endlich erzeugt.*

Kor. *Jede aufsteigende Folge von* $\mathbb{M}$*-vf.-abg. Mengen wird stationär.*

Vielfachen-abgeschl. Mengen von Monomen

Lemma. *Jede* $\mathbb{M}$*-vf.-abg. Menge* $S \subset \mathbb{M}$ *ist endlich erzeugt.*

Kor. *Jede aufsteigende Folge von* $\mathbb{M}$*-vf.-abg. Mengen wird stationär.*

Anw. auf die $\mathbb{M}$-vf.-abg. Menge S erzeugt von
$\{\,\mathrm{lm}(p_1), \ldots, \mathrm{lm}(p_r)\,\}$ für ein Erz.sys. $\{p_1, \ldots, p_r\}$
eines Ideals I von $k[x_1, \ldots, x_n]$

Vielfachen-abgeschl. Mengen von Monomen

Lemma. *Jede $\mathbb{M}$-vf.-abg. Menge $S \subset \mathbb{M}$ ist endlich erzeugt.*

Kor. *Jede aufsteigende Folge von $\mathbb{M}$-vf.-abg. Mengen wird stationär.*

Anw. auf die $\mathbb{M}$-vf.-abg. Menge S erzeugt von $\{\,\mathrm{lm}(p_1), \ldots, \mathrm{lm}(p_r)\,\}$ für ein Erz.sys. $\{p_1, \ldots, p_r\}$ eines Ideals I von $k[x_1, \ldots, x_n]$

Janet-Algorithmus bildet aufsteigende Folge von $\mathbb{M}$-vf.-abg. Mengen bis $S = \mathrm{lm}(I)$

Vielfachen-abgeschl. Mengen von Monomen

Lemma. *Jede* $\mathbb{M}$*-vf.-abg. Menge* $S \subset \mathbb{M}$ *ist endlich erzeugt.*

Kor. *Jede aufsteigende Folge von* $\mathbb{M}$*-vf.-abg. Mengen wird stationär.*

Anw. auf die $\mathbb{M}$-vf.-abg. Menge S erzeugt von $\{\,\mathrm{lm}(p_1), \ldots, \mathrm{lm}(p_r)\,\}$ für ein Erz.sys. $\{p_1, \ldots, p_r\}$ eines Ideals I von $k[x_1, \ldots, x_n]$

Janet-Algorithmus bildet aufsteigende Folge von $\mathbb{M}$-vf.-abg. Mengen bis $S = \mathrm{lm}(I)$

Kor. $\Rightarrow$ Janet-Algorithmus terminiert

Zerlegung in disjunkte Kegel

$(C, \mu) \in \mathrm{Pot}(\mathbb{M}) \times \mathrm{Pot}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ ist ein *Kegel*,

wenn $\exists\, v \in C : C = \mathrm{Mon}(\mu)\, v = \{m\, v \mid m \in \mathrm{Mon}(\mu)\}$.

Zerlegung in disjunkte Kegel

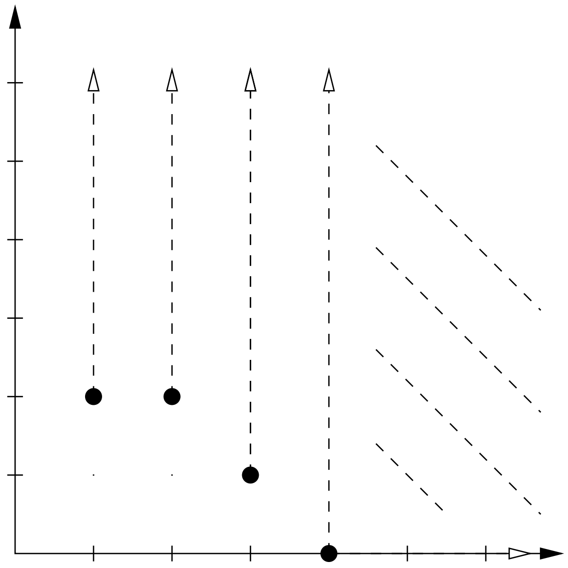
$(C, \mu) \in \mathrm{Pot}(\mathbb{M}) \times \mathrm{Pot}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ ist ein *Kegel*,
wenn $\exists\, v \in C : C = \mathrm{Mon}(\mu)\, v = \{m\, v \mid m \in \mathrm{Mon}(\mu)\}$.

$\{\, (C_1, \mu_1),\ \ldots,\ (C_l, \mu_l)\, \} \subset \mathrm{Pot}(\mathbb{M}) \times \mathrm{Pot}(\{x_1, \ldots, x_n\})$
ist eine *Zerlegung von* S *in disjunkte Kegel*, wenn
$S = \bigcup_{i=1}^{l} C_i$ und $C_i \cap C_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$.

Zerlegung in disjunkte Kegel

$(C, \mu) \in \mathrm{Pot}(\mathbb{M}) \times \mathrm{Pot}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ ist ein *Kegel*,
wenn $\exists\, v \in C : C = \mathrm{Mon}(\mu)\, v = \{m\, v \mid m \in \mathrm{Mon}(\mu)\}$.

$\{\, (C_1, \mu_1),\ \ldots,\ (C_l, \mu_l)\, \} \subset \mathrm{Pot}(\mathbb{M}) \times \mathrm{Pot}(\{x_1, \ldots, x_n\})$
ist eine *Zerlegung von* S *in disjunkte Kegel*, wenn
$S = \bigcup_{i=1}^{l} C_i$ und $C_i \cap C_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$.



$\mathbb{M}$-vf.-abg. Menge
erzeugt von $x_1 x_2^2$, $x_1^3 x_2$, x_1^4

Janet-Division

Mögliche Strategien zur Zerlegung von $\mathbb{M}$-vf.-abg. Mengen in disjunkte Kegel:

Involutive Divisionen (Gerdt, Blinkov et. al.)

Janet-Division

Mögliche Strategien zur Zerlegung von $\mathbb{M}$-vf.-abg. Mengen in disjunkte Kegel:

Involutive Divisionen (Gerdt, Blinkov et. al.)

Janet-Division:

Sei $M \subset \mathbb{M} = \mathrm{Mon}(x_1, \ldots, x_n)$ endlich.

Für einen Kegel mit Kegelspitze $m = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in M$ ist

x_i eine *multiplikative Variable*, d.h. $x_i \in \mu$, g.d.w.

$$a_i = \max\{\, b_i \mid x^b \in M;\ b_j = a_j\ \forall\, j < i\,\}.$$

Janet-Reduktion

NF(p, T, $\prec$) $\qquad p \in k[x_1, \ldots, x_n], \quad T = \{\, (d_1, \mu_1), \ldots, (d_l, \mu_l) \,\}$

$r \leftarrow 0$

while $p \neq 0$ do

if $\exists\, (d, \mu) \in T : \mathrm{lm}(p) \in \mathrm{Mon}(\mu)\, d$ then

$p \leftarrow p - \frac{\mathrm{lc}(p)}{\mathrm{lc}(d)}\, \frac{\mathrm{lm}(p)}{\mathrm{lm}(d)}\, d$

else

$r \leftarrow r + \mathrm{lc}(p)\ \mathrm{lm}(p)$

$p \leftarrow p - \mathrm{lc}(p)\ \mathrm{lm}(p)$

fi

od

return r

Janet-Reduktion

NF(p, T, $\prec$) $\qquad p \in k[x_1, \ldots, x_n], \qquad T = \{\, (d_1, \mu_1), \ldots, (d_l, \mu_l) \,\}$

$r \leftarrow 0$

while $p \neq 0$ do

if $\exists\, (d, \mu) \in T : \mathrm{lm}(p) \in \mathrm{Mon}(\mu)\, d$ then

$$p \leftarrow p - \frac{\mathrm{lc}(p)}{\mathrm{lc}(d)}\, \frac{\mathrm{lm}(p)}{\mathrm{lm}(d)}\, d$$

else

$$r \leftarrow r + \mathrm{lc}(p)\ \mathrm{lm}(p)$$

$$p \leftarrow p - \mathrm{lc}(p)\ \mathrm{lm}(p)$$

fi

od

return r $\qquad$ (Disj. Kegel $\Rightarrow$ Lauf des Alg. ist eindeutig bestimmt)

Janet-Algorithmus

JanetBasis(F, $\prec$) $\qquad$ $F \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ endlich

$G \leftarrow F$

do

$\qquad G \leftarrow$ Auto-Reduktion(G)

$\qquad J \leftarrow \{\, (d_1, \mu_1), \ldots, (d_l, \mu_l) \,\}$ mit $\{\, (\mathrm{lm}(d_1), \mu_1), \ldots, (\mathrm{lm}(d_l), \mu_l) \,\}$

$\qquad\qquad$ Zerl. in disj. Kegel von $[\mathrm{lm}(G)]$

$\qquad P \leftarrow \{\, \mathrm{NF}(x \cdot p, J) \mid (p, \mu) \in J,\, x \notin \mu \,\}$

$\qquad G \leftarrow \{\, p \mid (p, \mu) \in J \,\} \cup P$

while $\;P \neq \{0\}$

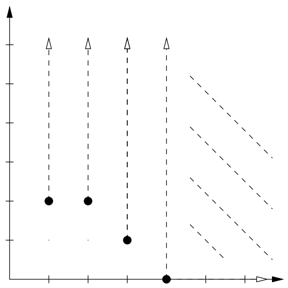
return J

Janet-Algorithmus

Satz. *(a) Eine k-Basis von $\langle F \rangle$ ist geg. durch $\bigcup_{(g,\mu)\in J} \mathrm{Mon}(\mu)\, g$.*

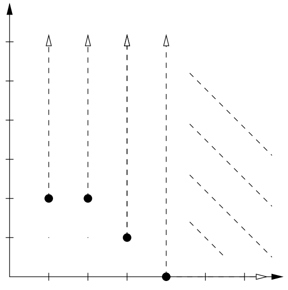
Janet-Algorithmus

Satz. *(a) Eine k-Basis von* $\langle F \rangle$ *ist geg. durch* $\bigcup_{(g,\mu)\in J} \mathrm{Mon}(\mu)\, g$.



Janet-Algorithmus

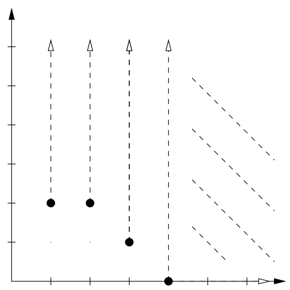
Satz. *(a) Eine k-Basis von* $\langle F \rangle$ *ist geg. durch* $\bigcup_{(g,\mu)\in J} \mathrm{Mon}(\mu)\, g$.



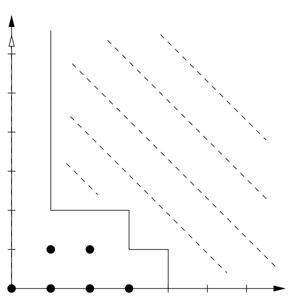
(b) Sei T *eine Zerlegung von* $\mathrm{Mon}(R) - \mathrm{lm}(\langle F \rangle)$ *in disjunkte Kegel. Eine k-Basis von* $R/\langle F \rangle$ *ist geg. durch die Restklassen vertreten durch* $\bigcup_{(m,\mu)\in T} \mathrm{Mon}(\mu)\, m$.

Janet-Algorithmus

Satz. *(a) Eine k-Basis von $\langle F \rangle$ ist geg. durch* $\bigcup_{(g,\mu)\in J} \mathrm{Mon}(\mu)\, g$.



(b) Sei T eine Zerlegung von $\mathrm{Mon}(R) - \mathrm{lm}(\langle F \rangle)$ in disjunkte Kegel. Eine k-Basis von $R/\langle F \rangle$ ist geg. durch die Restklassen vertreten durch $\bigcup_{(m,\mu)\in T} \mathrm{Mon}(\mu)\, m$.



Janet-Algorithmus

Satz. *(c) Für* $p_1, p_2 \in R$ *gilt:*

$$p_1 + \langle F \rangle = p_2 + \langle F \rangle \iff \mathrm{NF}(p_1, J) = \mathrm{NF}(p_2, J).$$

Janet-Algorithmus

Satz. *(c) Für* $p_1, p_2 \in R$ *gilt:*

$$p_1 + \langle F \rangle = p_2 + \langle F \rangle \iff \mathrm{NF}(p_1, J) = \mathrm{NF}(p_2, J).$$

(d) Sei $J = \{\, (g_1, \mu_1), \ldots, (g_r, \mu_r) \,\}$.

Definiere $\pi : R^{|J|} \longrightarrow R : e_i \mapsto g_i$.

Janet-Algorithmus

Satz. *(c) Für* $p_1, p_2 \in R$ *gilt:*

$$p_1 + \langle F \rangle = p_2 + \langle F \rangle \iff \mathrm{NF}(p_1, J) = \mathrm{NF}(p_2, J).$$

(d) Sei $J = \{\, (g_1, \mu_1), \ldots, (g_r, \mu_r)\,\}$.

Definiere $\pi : R^{|J|} \to R : e_i \mapsto g_i$. *Dann bilden die*

$$x_j\, e_i - \sum_l \alpha_{i,j,l}\, e_l, \qquad\qquad x_j \notin \mu_i, \quad i = 1, \ldots, r,$$

eine Janet-Basis von $\operatorname{Kern} \pi$ *bzgl. einer geeigneten Monomordnung, wobei* $x_j\, g_i = \sum_l \alpha_{i,j,l}\, g_l$.

Janet-Algorithmus

Satz. *(c) Für* $p_1, p_2 \in R$ *gilt:*

$$p_1 + \langle F \rangle = p_2 + \langle F \rangle \iff \mathrm{NF}(p_1, J) = \mathrm{NF}(p_2, J).$$

(d) Sei $J = \{ \, (g_1, \mu_1), \ldots, (g_r, \mu_r) \, \}$.

Definiere $\pi : R^{|J|} \longrightarrow R : e_i \mapsto g_i$. *Dann bilden die*

$$x_j \, e_i - \sum_l \alpha_{i,j,l} \, e_l, \qquad\qquad x_j \notin \mu_i, \quad i = 1, \ldots, r,$$

eine Janet-Basis von $\operatorname{Kern} \pi$ *bzgl. einer geeigneten Monomordnung, wobei* $x_j \, g_i = \sum_l \alpha_{i,j,l} \, g_l$.

$\leadsto$ Konstruktion einer freien Auflösung von $R / \langle F \rangle$

ohne neue Janet-Basis-Berechnung

Beispiele für Ore-Algebren

- Weyl-Algebra: *gewöhnliche Differentialgleichungen*

$A_1 = k[t][\partial; \mathrm{id}_{k[t]}, \frac{d}{dt}]$

$$\boxed{\partial\, a = a\, \partial + \frac{da}{dt}}$$

Beispiele für Ore-Algebren

- Weyl-Algebra: *gewöhnliche Differentialgleichungen*

$$A_1 = k[t][\partial;\, \mathrm{id}_{k[t]},\, \tfrac{d}{dt}] \qquad \boxed{\partial\, a = a\, \partial + \frac{da}{dt}}$$

- Shift-Operatoren: *Differenzengleichungen*

$$S_h = k[t][\delta_h;\, a(t) \mapsto a(t-h),\, 0] \qquad \boxed{\delta_h\, t = (t-h)\, \delta_h}$$

Beispiele für Ore-Algebren

- Weyl-Algebra: *gewöhnliche Differentialgleichungen*

$$A_1 = k[t][\partial;\, \mathrm{id}_{k[t]},\, \tfrac{d}{dt}]$$ $$\boxed{\partial\, a = a\, \partial + \tfrac{da}{dt}}$$

- Shift-Operatoren: *Differenzengleichungen*

$$S_h = k[t][\delta_h;\, a(t) \mapsto a(t-h),\, 0]$$ $$\boxed{\delta_h\, t = (t-h)\, \delta_h}$$

- Ore-Algebra für *differentielle retardierte Systeme:*

$$D_h = k[t][\partial;\, \mathrm{id}_{k[t]},\, \tfrac{d}{dt}][\delta_h;\, a(t) \mapsto a(t-h),\, 0]$$

Beispiele für Ore-Algebren

- Weyl-Algebra: *gewöhnliche Differentialgleichungen*

  $A_1 = k[t][\partial;\, \mathrm{id}_{k[t]},\, \frac{d}{dt}]$ $\boxed{\partial\, a = a\, \partial + \frac{da}{dt}}$

- Shift-Operatoren: *Differenzengleichungen*

  $S_h = k[t][\delta_h;\, a(t) \mapsto a(t-h),\, 0]$ $\boxed{\delta_h\, t = (t-h)\, \delta_h}$

- Ore-Algebra für *differentielle retardierte Systeme:*

  $D_h = k[t][\partial;\, \mathrm{id}_{k[t]},\, \frac{d}{dt}][\delta_h;\, a(t) \mapsto a(t-h),\, 0]$

- Weyl-Algebra: *partielle Differentialgleichungen*

  $A_n = k[x_1, ..., x_n][\partial_1; \sigma_1, \delta_1]...[\partial_n; \sigma_n, \delta_n]$ $\boxed{\partial_i\, x_j = x_j\, \partial_i + \delta_{ij}}$

Eigenschaften von Ore-Algebren

Sei A ein Integritätsbereich.

Prop. *Ist* σ *injektiv, so ist* $A[\partial;\sigma,\delta]$ *ein Integritätsbereich.*

Eigenschaften von Ore-Algebren

Sei A ein Integritätsbereich.

Prop. *Ist* σ *injektiv, so ist* $A[\partial;\sigma,\delta]$ *ein Integritätsbereich.*

Prop. *Ist* A *ein* links-noetherscher Ring *und* σ *bijektiv, dann ist auch* $A[\partial;\sigma,\delta]$ *ein links-noetherscher Ring.*

Eigenschaften von Ore-Algebren

Sei A ein Integritätsbereich.

Prop. *Ist* σ *injektiv, so ist* $A[\partial;\sigma,\delta]$ *ein Integritätsbereich.*

Prop. *Ist* A *ein* links-noetherscher Ring *und* σ *bijektiv, dann ist auch* $A[\partial;\sigma,\delta]$ *ein links-noetherscher Ring.*

Prop. *Besitzt* A *die* Links-Ore-Eigenschaft

$$\forall\,(a_1,a_2)\in A^2\quad \exists\,(0,0)\neq(b_1,b_2)\in A^2:\qquad b_1\,a_1=b_2\,a_2,$$

so auch $A[\partial;\sigma,\delta]$.

McConnell, Robson (2000), Chyzak, Salvy (1998)

Gröbner-Basen

Gröbner-Basen für nicht-kommutative Ringe:

- Kandri-Rody & Weispfenning
- Chyzak & Salvy
  Maple: ORE_ALGEBRA.
- Levandovskyy
  PLURAL
- Evans

Janet-Algorithmus für Ore-Algebren

$D = k[x_1, \ldots, x_n][\partial_1, \ldots, \partial_m]$ $\qquad$ $\partial_i \, a = \sigma_i(a) \, \partial_i + \delta_i(a)$

$\mathrm{Mon}(D) := \{x^i \, \partial^j \mid i \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n, \, j \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^m\}$

Janet-Algorithmus für Ore-Algebren

$D = k[x_1, \ldots, x_n][\partial_1, \ldots, \partial_m] \qquad\qquad \partial_i\, a = \sigma_i(a)\,\partial_i + \delta_i(a)$

$\mathrm{Mon}(D) := \{x^i\,\partial^j \mid i \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n,\; j \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^m\}$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Mon}(D)$ ist eine k-Basis von D

Aber: $\mathrm{Mon}(D)$ ist nicht abgeschlossen unter Linksmult.

Janet-Algorithmus für Ore-Algebren

$D = k[x_1, \ldots, x_n][\partial_1, \ldots, \partial_m] \qquad\qquad \partial_i\, a = \sigma_i(a)\, \partial_i + \delta_i(a)$

$\mathrm{Mon}(D) := \{x^i\, \partial^j \mid i \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n,\ j \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^m\}$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Mon}(D)$ ist eine k-Basis von D

Aber: $\mathrm{Mon}(D)$ ist nicht abgeschlossen unter Linksmult.

Benutze Bijektion

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mon}(D) & \longrightarrow & \mathrm{Mon}(k[\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n][\widetilde{\partial}_1, \ldots, \widetilde{\partial}_m]) \qquad \text{(komm.)} \\ x^i\, \partial^j & \longmapsto & \widetilde{x}^i\, \widetilde{\partial}^j \end{array}$$

Einschränkung auf: $\sigma_i(x_j) = a_{ij}\, x_j + b_{ij}, \quad \delta_i(x_j) = c_{ij}$

$a_{ij} \in k \setminus \{0\}, \quad b_{ij} \in k, \quad c_{ij} \in A, \quad \deg(c_{ij}) \leq 1$.

Verallgemeinerte Hilbert-Reihe

Sei $R := k[x_1, \ldots, x_n]$.

Die verallgemeinerte Hilbert-Reihe von $S \subseteq \mathrm{Mon}(R)$ ist:

$$H_S(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{m \in S} m$$

Verallgemeinerte Hilbert-Reihe

Sei $R := k[x_1, \ldots, x_n]$.

Die verallgemeinerte Hilbert-Reihe von $S \subseteq \mathrm{Mon}(R)$ ist:

$$H_S(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{m \in S} m$$

Wichtigster Fall: $I \trianglelefteq R,\qquad S = \mathrm{Mon}(R) - \mathrm{lm}(I)$

$H_S(x_1, \ldots, x_n)$ zählt die k-Basis von R/I auf,
die aus den Restklassen der $m \in S$ besteht

Verallgemeinerte Hilbert-Reihe

Sei $R := k[x_1, \ldots, x_n]$.

Die verallgemeinerte Hilbert-Reihe von $S \subseteq \mathrm{Mon}(R)$ ist:

$$H_S(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{m \in S} m$$

Wichtigster Fall: $I \trianglelefteq R, \qquad S = \mathrm{Mon}(R) - \mathrm{lm}(I)$

$H_S(x_1, \ldots, x_n)$ zählt die k-Basis von R/I auf,
die aus den Restklassen der $m \in S$ besteht

gewöhnliche Hilbert-Reihe von $R/\langle \mathrm{lm}(I) \rangle$
(bzgl. Std.-Graduierung) ist $H_S(\lambda, \ldots, \lambda)$

Parametrische Ableitungen

Aufgabe: Bestimme alle formalen Potenzreihen, die

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

lösen.

Parametrische Ableitungen

Aufgabe: Bestimme alle formalen Potenzreihen, die

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\[2ex] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

lösen.

Janet-Basis:

$$\left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \; \frac{\partial^3 u}{\partial y \, \partial t^2}, \; \frac{\partial^3 u}{\partial x \, \partial y^2}, \; \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}, \; \frac{\partial^4 u}{\partial x \, \partial y \, \partial t^2}, \; \frac{\partial^5 u}{\partial x \, \partial t^4} \right\}$$

Parametrische Ableitungen

Aufgabe: Bestimme alle formalen Potenzreihen, die

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

lösen.

Verallgemeinerte Hilbert-Reihe:

$$1 + t + y + x + t^2 + yt + xt + xy + t^3 + xt^2 + xyt + xt^3$$

Parametrische Ableitungen

Aufgabe: Bestimme alle formalen Potenzreihen, die

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

lösen.

Verallgemeinerte Hilbert-Reihe:

$$1 + t + y + x + t^2 + yt + xt + xy + t^3 + xt^2 + xyt + xt^3$$

formale Potenzreihen-Lösungen:

$$\underbrace{c + c_t\,t + c_y\,y + c_x\,x + c_{t^2}\,t^2}_{\text{frei wählbar}} + \ldots + \underbrace{c_{y^2}\,y^2 + c_{x^2}\,x^2 + c_{yt^2}\,yt^2}_{\text{eindeutig bestimmt}} + \ldots$$

Verallgemeinerte Hilbert-Reihe

- algebraische Gleichungssysteme (null-dim.):
  obere Schranke für Anzahl der Lösungen

Verallgemeinerte Hilbert-Reihe

- algebraische Gleichungssysteme (null-dim.):
  obere Schranke für Anzahl der Lösungen
- lineare Differentialgleichungssysteme:
  zählt freie Taylor-Koeffizienten auf

Verallgemeinerte Hilbert-Reihe

- algebraische Gleichungssysteme (null-dim.):
  obere Schranke für Anzahl der Lösungen

- lineare Differentialgleichungssysteme:
  zählt freie Taylor-Koeffizienten auf

- Ore-Algebren D:
  zählt eine k-Basis von Lösungen in $\mathcal{F}$ auf,

$$\mathcal{F} := \hom_k(D, k) = \{ \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta}\, x^{\alpha}\, \partial^{\beta} \mid c_{\alpha,\beta} \in k \}$$

  injektiver Kogenerator für ${}_D M$.

Algebraischer Zugang zur Kontrolltheorie

$$\boxed{\text{lineares (Differential-) Gleichungssystem}}$$

Algebraischer Zugang zur Kontrolltheorie

lineares (Differential-) Gleichungssystem

$\downarrow$

Modul (über $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$, $\mathbb{R}[t][\frac{d}{dt}]$, $\mathbb{R}(t)[\frac{d}{dt}]$)

Algebraischer Zugang zur Kontrolltheorie

lineares (Differential-) Gleichungssystem

$\downarrow$

Modul (über $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$, $\mathbb{R}[t][\frac{d}{dt}]$, $\mathbb{R}(t)[\frac{d}{dt}]$)

$\downarrow$

Strukturelle Aussagen über das Kontrollproblem
mittels Modultheorie und homologischer Algebra

Algebraischer Zugang zur Kontrolltheorie

lineares (Differential-) Gleichungssystem

↓

Modul (über $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$, $\mathbb{R}[t][\frac{d}{dt}]$, $\mathbb{R}(t)[\frac{d}{dt}]$)

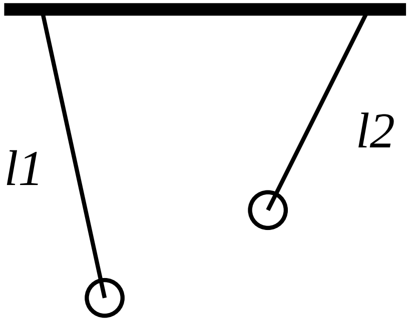
↓

Strukturelle Aussagen über das Kontrollproblem mittels Modultheorie und homologischer Algebra

↓

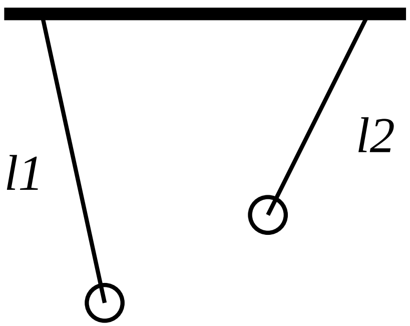
Symbolische Berechnungsmethoden

Beispiel Bipendulum



$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}_1 & = & x_3 \\ \dot{x}_2 & = & x_4 \\ \dot{x}_3 & = & -\frac{g}{l1}\,x_1 + \frac{g}{l1}\,u \\ \dot{x}_4 & = & -\frac{g}{l2}\,x_2 + \frac{g}{l2}\,u\end{array}\right.$$

Beispiel Bipendulum



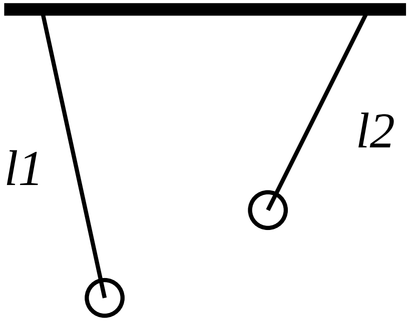
$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}_1 & = & x_3 \\ \dot{x}_2 & = & x_4 \\ \dot{x}_3 & = & -\frac{g}{l1}\,x_1 + \frac{g}{l1}\,u \\ \dot{x}_4 & = & -\frac{g}{l2}\,x_2 + \frac{g}{l2}\,u\end{array}\right.$$

Ring: $D = \mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$

Modul: $M = D^{1\times 5}/D^{1\times 4}\,R$ mit

$$R = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{g}{l1} & 0 & \frac{d}{dt} & 0 & -\frac{g}{l1} \\ 0 & \frac{g}{l2} & 0 & \frac{d}{dt} & -\frac{g}{l2} \end{pmatrix}$$

Beispiel Bipendulum



$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & x_3 \\ \dot{x}_2 & = & x_4 \\ \dot{x}_3 & = & -\frac{g}{l1}\,x_1 + \frac{g}{l1}\,u \\ \dot{x}_4 & = & -\frac{g}{l2}\,x_2 + \frac{g}{l2}\,u \end{cases}$$

Ring: $D = \mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$

Modul: $M = D^{1\times 5}/D^{1\times 4}\,R$ mit

$$R = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{g}{l1} & 0 & \frac{d}{dt} & 0 & -\frac{g}{l1} \\ 0 & \frac{g}{l2} & 0 & \frac{d}{dt} & -\frac{g}{l2} \end{pmatrix}$$

J.-F. Pommaret, *Partial Differential Control Theory*, Kluwer, 2001.

System	**Modul**	**Homologische Algebra**
autonome Elemente	$t(M) \neq 0$	$\mathrm{ext}^1_D(M^T, D) \neq 0$
steuerbar, parametrisierbar	$t(M) = 0$	$\mathrm{ext}^1_D(M^T, D) = 0$

Beiträge zu dieser Klassifikation: Fliess, Oberst, Pommaret, Quadrat

System	**Modul**	**Homologische Algebra**
autonome Elemente	$t(M) \neq 0$	$\mathrm{ext}^1_D(M^T, D) \neq 0$
steuerbar, parametrisierbar	$t(M) = 0$	$\mathrm{ext}^1_D(M^T, D) = 0$
Parametrisierung ist parametrisierbar	reflexiv	$\mathrm{ext}^i_D(M^T, D) = 0,$ $i = 1, 2$

Beiträge zu dieser Klassifikation: Fliess, Oberst, Pommaret, Quadrat

System	**Modul**	**Homologische Algebra**
autonome Elemente	$t(M) \neq 0$	$\mathrm{ext}^1_D(M^T, D) \neq 0$
steuerbar, parametrisierbar	$t(M) = 0$	$\mathrm{ext}^1_D(M^T, D) = 0$
Parametrisierung ist parametrisierbar	reflexiv	$\mathrm{ext}^i_D(M^T, D) = 0$, $i = 1, 2$
…	…	…
Kette von n Parametrisierungen	projektiv	$\mathrm{ext}^i_D(M^T, D) = 0$, $1 \leq i \leq n := \mathrm{rgld}(D)$

Beiträge zu dieser Klassifikation: Fliess, Oberst, Pommaret, Quadrat

System	**Modul**	**Homologische Algebra**
autonome Elemente	$t(M) \neq 0$	$\mathrm{ext}^1_D(M^T, D) \neq 0$
steuerbar, parametrisierbar	$t(M) = 0$	$\mathrm{ext}^1_D(M^T, D) = 0$
Parametrisierung ist parametrisierbar	reflexiv	$\mathrm{ext}^i_D(M^T, D) = 0,$ $i = 1, 2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
Kette von n Parametrisierungen	projektiv	$\mathrm{ext}^i_D(M^T, D) = 0,$ $1 \leq i \leq n := \mathrm{rgld}(D)$
Flachheit	frei	$\emptyset$

Beiträge zu dieser Klassifikation: Fliess, Oberst, Pommaret, Quadrat

Maple-Pakete...

... am Lehrstuhl B für Mathematik, RWTH Aachen

zur Berechnung von involutiven Basen:

`Involutive` / `Janet`

Maple-Pakete. . .

. . . am Lehrstuhl B für Mathematik, RWTH Aachen

zur Berechnung von involutiven Basen:

`Involutive` / `Janet`

`JanetOre`

Maple-Pakete...

...am Lehrstuhl B für Mathematik, RWTH Aachen

zur Berechnung von involutiven Basen:

`Involutive` / `Janet`

`JanetOre`

`LDA` (**L**inear **D**ifference **A**lgebra)

in Kooperation mit V. P. Gerdt & Y. A. Blinkov

ginv

- C++ module for Python

web: `http://invo.jinr.ru`

ginv

- C++ module for Python
- comp. of Gröbner bases using involutive algorithms

web: `http://invo.jinr.ru`

ginv

- C++ module for Python
- comp. of Gröbner bases using involutive algorithms
- polynomials, differential / difference equations

web: `http://invo.jinr.ru`

ginv

- C++ module for Python
- comp. of Gröbner bases using involutive algorithms
- polynomials, differential / difference equations
- open source software

web: `http://invo.jinr.ru`

ginv

- C++ module for Python
- comp. of Gröbner bases using involutive algorithms
- polynomials, differential / difference equations
- open source software
- originated by V. P. Gerdt, Y. A. Blinkov

web: `http://invo.jinr.ru`

ginv

- C++ module for Python
- comp. of Gröbner bases using involutive algorithms
- polynomials, differential / difference equations
- open source software
- originated by V. P. Gerdt, Y. A. Blinkov
- contributions by V. Brendt, S. Jambor, D. Robertz

web: `http://invo.jinr.ru`

Anwendungen

`Involutive`:

- Invariantentheorie endlicher Gruppen
  Plesken – R., *Exp. Math.* 14:2 (2005)
- Konstruktion von Matrixdarstellungen von Gruppen
  Plesken – R., *J. Algebra* 300 (2006)

Anwendungen

`Involutive`:

- Invariantentheorie endlicher Gruppen
  Plesken – R., *Exp. Math.* 14:2 (2005)
- Konstruktion von Matrixdarstellungen von Gruppen
  Plesken – R., *J. Algebra* 300 (2006)

`LDA`:

- Konstruktion von Differenzenschemata für PDEs
  Gerdt, Blinkov, Mozzhilkin, *SIGMA* 2 (2006)
- Reduktion von Feynman-Integralen . . .
  (work in progress)

OreModules

- konstruktive Modultheorie über Ore-Algebren
- Syzygien, freie Auflösungen, ext-Gruppen . . .

OreModules

- konstruktive Modultheorie über Ore-Algebren
- Syzygien, freie Auflösungen, ext-Gruppen . . .

für multidimensionale lineare Systeme

- entscheidet Steuerbarkeit und Parametrisierbarkeit

web: `wwwb.math.rwth-aachen.de/OreModules`

Autoren: F. Chyzak, A. Quadrat, D. Robertz

OreModules

- konstruktive Modultheorie über Ore-Algebren
- Syzygien, freie Auflösungen, ext-Gruppen ...

für multidimensionale lineare Systeme

- entscheidet Steuerbarkeit und Parametrisierbarkeit
- konstruiert (minimale) Parametrisierungen

web: `wwwb.math.rwth-aachen.de/OreModules`

Autoren: F. Chyzak, A. Quadrat, D. Robertz

OreModules

- konstruktive Modultheorie über Ore-Algebren
- Syzygien, freie Auflösungen, ext-Gruppen . . .

für multidimensionale lineare Systeme

- entscheidet Steuerbarkeit und Parametrisierbarkeit
- konstruiert (minimale) Parametrisierungen
- Bezout-Identitäten,

web: `wwwb.math.rwth-aachen.de/OreModules`

Autoren: F. Chyzak, A. Quadrat, D. Robertz

OreModules

- konstruktive Modultheorie über Ore-Algebren
- Syzygien, freie Auflösungen, ext-Gruppen ...

für multidimensionale lineare Systeme

- entscheidet Steuerbarkeit und Parametrisierbarkeit
- konstruiert (minimale) Parametrisierungen
- Bezout-Identitäten,
- entscheidet Flachheit (auch π-Freiheit), etc.

web: `wwwb.math.rwth-aachen.de/OreModules`

Autoren: F. Chyzak, A. Quadrat, D. Robertz

Literatur

W. Plesken, D. Robertz,
Janet's approach to presentations and resolutions for polynomials and linear pdes,
Archiv der Mathematik, 84 (1), 2005

Y. A. Blinkov, C. F. Cid, V. P. Gerdt, W. Plesken, D. Robertz,
The Maple Package "Janet": I. Polynomial Systems and
II. Linear Partial Differential Equations,
CASC 2003

Y. A. Blinkov, V. P. Gerdt, D. A. Yanovich,
Construction of Janet Bases, I. Monomial Bases and
II. Polynomial Bases,
CASC 2001

Literatur

V. P. Gerdt,
Gröbner Bases in Perturbative Calculations,
Nuclear Physics B (Proc. Suppl.), 135, 2004

V. P. Gerdt, Y. A. Blinkov,
Janet-like Monomial Division. Janet-like Gröbner Bases,
CASC 2005, LNCS 3781, Springer, 2005

V. P. Gerdt,
Involutive Algorithms for Computing Gröbner Bases,
Proc. “Computational commutative and non-commutative algebraic geometry” (Chishinau, June 6-11, 2004), to appear

Literatur

A. Kandri-Rody, V. Weispfenning,
Non-commutative Gröbner Bases in Algebras of Solvable Type,
J. Symbolic Computation 9 (1990)

F. Chyzak, B. Salvy,
Non-commutative elimination in Ore algebras proves multivariate identities, J. Symbolic Computation 26 (1998)

V. Levandovskyy,
Non-commutative Computer Algebra for polynomial algebras: Gröbner bases, applications and implementation,
Dissertation, Univ. Kaiserslautern, 2005

G. A. Evans,
Noncommutative Involutive Bases,
Dissertation, University of Wales, Bangor, 2006

Literatur

V. P. Gerdt, D. A. Yanovich,
Experimental Analysis of Involutive Criteria,
“Algorithmic Algebra and Logic 2005”, April 3-6, 2005, Passau, Germany

J. Apel, R. Hemmecke,
Detecting unnecessary reductions in an involutive basis computation,
J. Symbolic Computation, 40 (4-5), 2005

V. P. Gerdt, Y. A. Blinkov,
Involutive bases of polynomial ideals. Minimal involutive bases,
Mathematics and Computers in Simulation, 45, 1998

Literatur

W. Plesken, D. Robertz,
Constructing Invariants for Finite Groups,
Experimental Mathematics 14:2 (2005)

W. Plesken, D. Robertz,
Representations, commutative algebra, and Hurwitz groups,
J. Algebra 300 (2006)

V. P. Gerdt,
On Computation of Gröbner Bases for Linear Difference Systems,
Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A 559:1 (2006)

V. P. Gerdt, D. Robertz,
A Maple Package for Computing Gröbner Bases for Linear Recurrence Relations,
Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 559 (1), 2006

Literatur

H. Kwakernaak, R. Sivan,
Linear Optimal Control Systems,
John Wiley & Sons, 1972

D. Robertz,
Formal Computational Methods for Control Theory,
Dissertation, RWTH Aachen, 2006,
`http://darwin.bth.rwth-aachen.de/opus/volltexte/2006/1586`

Literatur

F. Chyzak, A. Quadrat, D. Robertz,
OreModules project,
`http://wwwb.math.rwth-aachen.de/OreModules`

F. Chyzak, A. Quadrat, D. Robertz,
Effective algorithms for parametrizing linear control systems over Ore algebras, Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing 16:5 (2005)

J.-F. Pommaret,
Partial Differential Control Theory,
Kluwer, 2001

Literatur

M. Janet,
Leçons sur les systèmes des équationes aux dérivées partielles,
Gauthiers-Villars, 1929

C. Méray,
Démonstration générale de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles,
J. de mathématiques pures et appliquées, 3e série, tome VI, 1880

C. Riquier,
Les systèmes d'équations aux dérivées partielles,
Gauthiers-Villars, 1910

J. F. Ritt,
Differential Algebra, Dover, 1966

Literatur

J. Thomas,
Differential Systems, AMS, 1937

W. W. Adams, P. Loustaunau,
An Introduction to Gröbner Bases,
AMS, 1994

T. Becker, V. Weispfenning,
Gröbner Bases. A Computational Approach to Commutative Algebra,
Springer, 1993

Literatur

V. P. Gerdt, Y. A. Blinkov, V. V. Mozzhilkin,
Gröbner Bases and Generation of Difference Schemes for Partial Differential Equations,
Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 2006

O. V. Tarasov,
Reduction of Feynman graph amplitudes to a minimal set of basic integrals,
Acta Physica Polonica, B29, 1998

V. A. Smirnov,
Evaluating Feynman Integrals,
STMP 211, Springer, 2004