Multivariate algorithmische Summation

Prof. Dr. Wolfram Koepf
Torsten Sprenger

Universität Kassel
http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf

DMV-Tagung 2006
Minisymposium Computeralgebra
22.09.2006 / Universität Bonn

Inhaltsangabe

- Typische Fragestellungen
- Fasenmyer-Algorithmus
- Effizienzsteigerung
- Multivariater Fall
- Anwendungen

Inhaltsangabe

- Typische Fragestellungen
- Fasenmyer-Algorithmus
- Effizienzsteigerung
- Multivariater Fall
- Anwendungen

Bestimmte Summation

Univariater Fall

- Wie findet man eine summenfreie Formel für

$$S_n := \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n,k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \ ?$$

- Wie findet man eine holonome Rekursionsgleichung für

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^3 \ ?$$

- Eine Rekursionsgleichung heißt holonom, wenn sie linear und homogen ist und Polynomkoeffizienten hat.

Bestimmte Summation

Univariater Fall

- Wie findet man eine summenfreie Formel für

$$S_n := \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n,k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \;?$$

- Wie findet man eine holonome Rekursionsgleichung für

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^3 \;?$$

- Eine Rekursionsgleichung heißt holonom, wenn sie linear und homogen ist und Polynomkoeffizienten hat.

Bestimmte Summation

Univariater Fall

- Wie findet man eine summenfreie Formel für

$$S_n := \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n,k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \; ?$$

- Wie findet man eine holonome Rekursionsgleichung für

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^3 \; ?$$

- Eine Rekursionsgleichung heißt holonom, wenn sie linear und homogen ist und Polynomkoeffizienten hat.

Bestimmte Summation

Multivariater Fall

- Wie findet man eine summenfreie Formel für

$$S_n := \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} F(n,i,j) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \binom{n}{j} \binom{j}{i} x^i y^{j-i} z^{n-j} \ ?$$

- Wie findet man eine holonome Rekursionsgleichung für

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \binom{n}{j}^2 \binom{j}{i} x^i y^{j-i} z^{n-j} \ ?$$

- Wir lösen die betrachteten Probleme mit *Maple*.

Bestimmte Summation

Multivariater Fall

- Wie findet man eine summenfreie Formel für

$$S_n := \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} F(n,i,j) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \binom{n}{j} \binom{j}{i} x^i \, y^{j-i} \, z^{n-j} \; ?$$

- Wie findet man eine holonome Rekursionsgleichung für

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \binom{n}{j}^2 \binom{j}{i} x^i \, y^{j-i} \, z^{n-j} \; ?$$

- Wir lösen die betrachteten Probleme mit *Maple*.

Bestimmte Summation

Multivariater Fall

- Wie findet man eine summenfreie Formel für

$$S_n := \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} F(n,i,j) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \binom{n}{j} \binom{j}{i} x^i \, y^{j-i} \, z^{n-j} \; ?$$

- Wie findet man eine holonome Rekursionsgleichung für

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \binom{n}{j}^2 \binom{j}{i} x^i \, y^{j-i} \, z^{n-j} \; ?$$

- Wir lösen die betrachteten Probleme mit *Maple*.

Inhaltsangabe

- Typische Fragestellungen
- Fasenmyer-Algorithmus
- Effizienzsteigerung
- Multivariater Fall
- Anwendungen

Fasenmyer-Algorithmus (1945)

Eingabe

Sei

$$S_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n,k) \,,$$

mit einem *hypergeometrischen Term* $F(n,k)$:

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)}, \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} \in \mathbb{K}(n,k)$$

für einen geeigneten Körper $\mathbb{K}$, z. B. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \ldots)$.

Ausgabe

Eine holonome Rekursion für S_n.

Fasenmyer-Algorithmus (1945)

Eingabe

Sei
$$S_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n,k)\ ,$$
mit einem *hypergeometrischen Term* $F(n,k)$:
$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)}, \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} \in \mathbb{K}(n,k)$$
für einen geeigneten Körper $\mathbb{K}$, z. B. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \ldots)$.

Ausgabe

Eine holonome Rekursion für S_n.

Algorithmus

Algorithmus

- Ansatz

$$\sum_{j=0}^{J} \sum_{i=0}^{I} a_{ij} F(n+j, k+i) = 0 \; .$$

- Division durch $F(n,k)$ liefert eine rationale Identität.
- Fasst man den Zähler als Polynom in k auf, liefert Koeffizientenvergleich bei Erfolg eine k-freie Rekursion mit $a_{ij} \in \mathbb{K}(n)$.
- Summation bzgl. k und Multiplikation mit dem Hauptnenner liefert die gesuchte holonome Rekursion für S_n.

Algorithmus

Algorithmus

- Ansatz

$$\sum_{j=0}^{J}\sum_{i=0}^{I} a_{ij}F(n+j,k+i)=0\ .$$

- Division durch $F(n,k)$ liefert eine rationale Identität.
- Fasst man den Zähler als Polynom in k auf, liefert Koeffizientenvergleich bei Erfolg eine k-freie Rekursion mit $a_{ij} \in \mathbb{K}(n)$.
- Summation bzgl. k und Multiplikation mit dem Hauptnenner liefert die gesuchte holonome Rekursion für S_n.

Algorithmus

Algorithmus

- Ansatz

$$\sum_{j=0}^{J} \sum_{i=0}^{I} a_{ij} F(n+j, k+i) = 0 \, .$$

- Division durch $F(n,k)$ liefert eine rationale Identität.
- Fasst man den Zähler als Polynom in k auf, liefert Koeffizientenvergleich bei Erfolg eine k-freie Rekursion mit $a_{ij} \in \mathbb{K}(n)$.
- Summation bzgl. k und Multiplikation mit dem Hauptnenner liefert die gesuchte holonome Rekursion für S_n.

Algorithmus

Algorithmus

- Ansatz
$$\sum_{j=0}^{J}\sum_{i=0}^{I} a_{ij} F(n+j,k+i) = 0 \ .$$
- Division durch $F(n,k)$ liefert eine rationale Identität.
- Fasst man den Zähler als Polynom in k auf, liefert Koeffizientenvergleich bei Erfolg eine k-freie Rekursion mit $a_{ij} \in \mathbb{K}(n)$.
- Summation bzgl. k und Multiplikation mit dem Hauptnenner liefert die gesuchte holonome Rekursion für S_n.

Beispiele

Beispiel

- Sei
$$F(n,k) = \binom{n}{k} \ .$$
- Der Ansatz mit $I = J = 1$ liefert die Rekursion des Pascalschen Dreiecks
$$F(n+1,k+1) - F(n,k+1) - F(n,k) = 0 \ .$$
- Summation bzgl. k liefert
$$S_{n+1} - S_n - S_n = 0 \ , \quad \text{also} \quad S_{n+1} = 2\, S_n \ ,$$
und mit $S_0 = 1$ folgt $S_n = 2^n$.

Beispiele

Beispiel

- Sei

$$F(n,k) = \binom{n}{k} .$$

- Der Ansatz mit $I = J = 1$ liefert die Rekursion des Pascalschen Dreiecks

$$F(n+1,k+1) - F(n,k+1) - F(n,k) = 0 .$$

- Summation bzgl. k liefert

$$S_{n+1} - S_n - S_n = 0 , \quad \text{also} \quad S_{n+1} = 2\,S_n ,$$

und mit $S_0 = 1$ folgt $S_n = 2^n$.

Beispiele

Beispiel

- Sei
$$F(n,k)=\binom{n}{k}\ .$$
- Der Ansatz mit $I=J=1$ liefert die Rekursion des Pascalschen Dreiecks
$$F(n+1,k+1)-F(n,k+1)-F(n,k)=0\ .$$
- Summation bzgl. k liefert
$$S_{n+1}-S_n-S_n=0\ ,\quad \text{also}\quad S_{n+1}=2\,S_n\ ,$$
und mit $S_0=1$ folgt $S_n=2^n$.

Beispiele

Beispiel

- Sei
$$F(n,k) = \binom{n}{k}^2 .$$
- Der Ansatz mit $I = J = 2$ liefert die Rekursion
$$\begin{aligned} 0 \;=\; & (n+2)F(n+2,k+2) - (2n+3)F(n+1,k+2) \\ & + (n+1)F(n,k+2) - (2n+3)F(n+1,k+1) \\ & - 2(n+1)F(n,k+1) + (n+1)F(n,k) . \end{aligned}$$
- Summation bzgl. k liefert $(n+2)\, S_{n+2} - 2\,(2n+3)\, S_{n+1} = 0$ und mit $S_0 = 1$ folgt $S_n = \binom{2n}{n}$. *Maple*

Beispiele

Beispiel

- Sei
$$F(n,k)=\binom{n}{k}^2 .$$
- Der Ansatz mit $I=J=2$ liefert die Rekursion
$$\begin{aligned}0 \;=\; &(n+2)F(n+2,k+2)-(2n+3)F(n+1,k+2)\\&+(n+1)F(n,k+2)-(2n+3)F(n+1,k+1)\\&-2(n+1)F(n,k+1)+(n+1)F(n,k)\,.\end{aligned}$$
- Summation bzgl. k liefert $(n+2)\,S_{n+2}-2\,(2n+3)\,S_{n+1}=0$ und mit $S_0=1$ folgt $S_n=\binom{2n}{n}$. *Maple*

Beispiele

Beispiel

- Sei
$$F(n,k)=\binom{n}{k}^2 .$$
- Der Ansatz mit $I=J=2$ liefert die Rekursion
$$\begin{aligned}0 \;=\;& (n+2)F(n+2,k+2)-(2n+3)F(n+1,k+2)\\ &+(n+1)F(n,k+2)-(2n+3)F(n+1,k+1)\\ &-2(n+1)F(n,k+1)+(n+1)F(n,k) .\end{aligned}$$
- Summation bzgl. k liefert $(n+2)\,S_{n+2}-2\,(2n+3)\,S_{n+1}=0$ und mit $S_0=1$ folgt $S_n=\binom{2n}{n}$. *Maple*

Inhaltsangabe

- Typische Fragestellungen
- Fasenmyer-Algorithmus
- Effizienzsteigerung
- Multivariater Fall
- Anwendungen

Effizienzsteigerung

Schwierigkeiten

- Der rechteckige Summationsbereich $0 \leqq i \leqq I$, $0 \leqq j \leqq J$, ist nicht optimal.
- Die Suche nach einer k-freien Rekursion ist meist nur bei (zu) hoher Ordnung J erfolgreich.

Lösungen

- Man führt sog. P-maximale Strukturmengen ein (Verbaeten 1976).
- Man betrachtet statt k-freier Rekursionen sog. Zertifikats-Rekursionen (Wegschaider 1997).

Effizienzsteigerung

Schwierigkeiten

- Der rechteckige Summationsbereich $0 \leqq i \leqq I$, $0 \leqq j \leqq J$, ist nicht optimal.
- Die Suche nach einer k-freien Rekursion ist meist nur bei (zu) hoher Ordnung J erfolgreich.

Lösungen

- Man führt sog. P-maximale Strukturmengen ein (Verbaeten 1976).
- Man betrachtet statt k-freier Rekursionen sog. Zertifikats-Rekursionen (Wegschaider 1997).

Effizienzsteigerung

Schwierigkeiten

- Der rechteckige Summationsbereich $0 \leqq i \leqq I$, $0 \leqq j \leqq J$, ist nicht optimal.
- Die Suche nach einer k-freien Rekursion ist meist nur bei (zu) hoher Ordnung J erfolgreich.

Lösungen

- Man führt sog. P-maximale Strukturmengen ein (Verbaeten 1976).
- Man betrachtet statt k-freier Rekursionen sog. Zertifikats-Rekursionen (Wegschaider 1997).

Effizienzsteigerung

Schwierigkeiten

- Der rechteckige Summationsbereich $0 \leqq i \leqq I$, $0 \leqq j \leqq J$, ist nicht optimal.
- Die Suche nach einer k-freien Rekursion ist meist nur bei (zu) hoher Ordnung J erfolgreich.

Lösungen

- Man führt sog. P-maximale Strukturmengen ein (Verbaeten 1976).
- Man betrachtet statt k-freier Rekursionen sog. Zertifikats-Rekursionen (Wegschaider 1997).

Effizienzsteigerung

P-maximale Strukturmengen

- Es stellt sich heraus, dass k-freie Rekursionen keine rechteckigen, sondern in der Regel dreieckige Summationsgebiete S haben.
- Man kann die möglichen Summationsgebiete direkt aus dem Eingabeterm berechnen (Verbaeten 1976). *Maple*

Zertifikatsrekursionen

Man sucht nun nach Rekursionen des Typs ($\Delta_k a_k = a_{k+1} - a_k$)

$$\sum_{i,j \in S} a_{ij}(n)\, F(n+j, k+i) = \Delta_k \sum_{i,j \in S} b_{ij}(n,k)\, F(n+j, k+i)\,.$$

Effizienzsteigerung

P-maximale Strukturmengen

- Es stellt sich heraus, dass k-freie Rekursionen keine rechteckigen, sondern in der Regel dreieckige Summationsgebiete S haben.
- Man kann die möglichen Summationsgebiete direkt aus dem Eingabeterm berechnen (Verbaeten 1976). *Maple*

Zertifikatsrekursionen

Man sucht nun nach Rekursionen des Typs ($\Delta_k a_k = a_{k+1} - a_k$)

$$\sum_{i,j \in S} a_{ij}(n)\, F(n+j, k+i) = \Delta_k \sum_{i,j \in S} b_{ij}(n,k)\, F(n+j, k+i)\ .$$

Effizienzsteigerung

P-maximale Strukturmengen

- Es stellt sich heraus, dass k-freie Rekursionen keine rechteckigen, sondern in der Regel dreieckige Summationsgebiete S haben.
- Man kann die möglichen Summationsgebiete direkt aus dem Eingabeterm berechnen (Verbaeten 1976). *Maple*

Zertifikatsrekursionen

Man sucht nun nach Rekursionen des Typs ($\Delta_k a_k = a_{k+1} - a_k$)

$$\sum_{i,j \in S} a_{ij}(n)\, F(n+j, k+i) = \Delta_k \sum_{i,j \in S} b_{ij}(n,k)\, F(n+j, k+i)\,.$$

Beispiele

Beispiel

Schon bei dem einfachen Beispiel $F(n,k) = \binom{n}{k}^3$ ergibt sich eine völlig neue Situation. Diesmal findet man eine Zertifikatsrekursion *zweiter Ordnung*, zum Beispiel

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & (7\,n^2+7\,n+2)\,F(n,k-2)-(n+1)^2\,F(n+1,k-2) \\ & +8\,F(n-1,k-2)\,n^2 \\ & +\Delta_k\Big(7\,n^2+7\,n+2)\,F(n,k-1)-(n+1)^2\,F(n+1,k-1) \\ & +(9\,n\,k+3\,k+2\,n+1-n^2)\,F(n,k)+2\,F(n-1,k)\,n^2 \\ & -(n+1)^2\,F(n+1,k)+6\,F(n-1,k-1)\,n^2\Big) \end{aligned}$$

Maple

Beispiele

Beispiel

Schon bei dem einfachen Beispiel $F(n,k) = \binom{n}{k}^3$ ergibt sich eine völlig neue Situation. Diesmal findet man eine Zertifikatsrekursion *zweiter Ordnung*, zum Beispiel

$$\begin{aligned}0 \;=\; & (7\,n^2+7\,n+2)\,F(n,k-2)-(n+1)^2\,F(n+1,k-2) \\ & +8\,F(n-1,k-2)\,n^2 \\ & +\Delta_k\Big(7\,n^2+7\,n+2)\,F(n,k-1)-(n+1)^2\,F(n+1,k-1) \\ & +(9\,n\,k+3\,k+2\,n+1-n^2)\,F(n,k)+2\,F(n-1,k)\,n^2 \\ & -(n+1)^2\,F(n+1,k)+6\,F(n-1,k-1)\,n^2\Big)\end{aligned}$$

Maple

Beispiele

Beispiel

Schon bei dem einfachen Beispiel $F(n,k) = \binom{n}{k}^3$ ergibt sich eine völlig neue Situation. Diesmal findet man eine Zertifikatsrekursion *zweiter Ordnung*, zum Beispiel

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & (7\,n^2+7\,n+2)\,F(n,k-2)-(n+1)^2\,F(n+1,k-2) \\ & +8\,F(n-1,k-2)\,n^2 \\ & +\Delta_k\Big(7\,n^2+7\,n+2)\,F(n,k-1)-(n+1)^2\,F(n+1,k-1) \\ & +(9\,n\,k+3\,k+2\,n+1-n^2)\,F(n,k)+2\,F(n-1,k)\,n^2 \\ & -(n+1)^2\,F(n+1,k)+6\,F(n-1,k-1)\,n^2\Big) \end{aligned}$$

Maple

Inhaltsangabe

- Typische Fragestellungen
- Fasenmyer-Algorithmus
- Effizienzsteigerung
- Multivariater Fall
- Anwendungen

Multivariater Fall

- Im multivariaten Fall betrachten wir Summen der Form

$$S_n := \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \sum_{k_r \in \mathbb{Z}} F(n, k_1, \ldots, k_r) \; .$$

- Wieder kann man in analoger Weise k-freie Rekursionen, P-maximale Strukturmengen und Zertifikatsrekursionen erklären.
- Torsten Sprenger hat in seiner Diplomarbeit eine Maple-Implementierung der betrachteten Algorithmen entwickelt.
- Das Neue seiner Implementierung ist u. a. der vollautomatische Ablauf, der eine interne Iteration, geeignete Strukturmengen zu durchlaufen, in Gang setzt. *Maple*

Multivariater Fall

- Im multivariaten Fall betrachten wir Summen der Form
$$S_n := \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \sum_{k_r \in \mathbb{Z}} F(n, k_1, \ldots, k_r) \ .$$
- Wieder kann man in analoger Weise k-freie Rekursionen, P-maximale Strukturmengen und Zertifikatsrekursionen erklären.
- Torsten Sprenger hat in seiner Diplomarbeit eine Maple-Implementierung der betrachteten Algorithmen entwickelt.
- Das Neue seiner Implementierung ist u. a. der vollautomatische Ablauf, der eine interne Iteration, geeignete Strukturmengen zu durchlaufen, in Gang setzt. *Maple*

Multivariater Fall

- Im multivariaten Fall betrachten wir Summen der Form

$$S_n := \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \sum_{k_r \in \mathbb{Z}} F(n, k_1, \ldots, k_r) \ .$$

- Wieder kann man in analoger Weise k-freie Rekursionen, P-maximale Strukturmengen und Zertifikatsrekursionen erklären.
- Torsten Sprenger hat in seiner Diplomarbeit eine Maple-Implementierung der betrachteten Algorithmen entwickelt.
- Das Neue seiner Implementierung ist u. a. der vollautomatische Ablauf, der eine interne Iteration, geeignete Strukturmengen zu durchlaufen, in Gang setzt. *Maple*

Multivariater Fall

- Im multivariaten Fall betrachten wir Summen der Form

$$S_n := \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \sum_{k_r \in \mathbb{Z}} F(n, k_1, \ldots, k_r) \, .$$

- Wieder kann man in analoger Weise k-freie Rekursionen, P-maximale Strukturmengen und Zertifikatsrekursionen erklären.
- Torsten Sprenger hat in seiner Diplomarbeit eine Maple-Implementierung der betrachteten Algorithmen entwickelt.
- Das Neue seiner Implementierung ist u. a. der vollautomatische Ablauf, der eine interne Iteration, geeignete Strukturmengen zu durchlaufen, in Gang setzt. *Maple*

Inhaltsangabe

- Typische Fragestellungen
- Fasenmyer-Algorithmus
- Effizienzsteigerung
- Multivariater Fall
- Anwendungen

Apéry-Strehl-Identität

Beispiel

Wie beweist man die Apéry-Strehl-Identität

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{n+i}{i}\binom{i}{j}^3=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2 \; ?$$

Lösung

Man findet heraus, dass beide Seiten dieselbe Rekursion

$$(2\,n+3)\,(17\,n^2+51\,n+39)\,S_{n+1}-(n+2)^3\,S_{n+2}-(n+1)^3\,S_n=0$$

erfüllen und zeigt, dass zwei Anfangswerte übereinstimmen.

Apéry-Strehl-Identität

Beispiel

Wie beweist man die Apéry-Strehl-Identität

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{n+i}{i}\binom{i}{j}^3=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2\ ?$$

Lösung

Man findet heraus, dass beide Seiten dieselbe Rekursion

$$(2\,n+3)\,(17\,n^2+51\,n+39)\,S_{n+1}-(n+2)^3\,S_{n+2}-(n+1)^3\,S_n=0$$

erfüllen und zeigt, dass zwei Anfangswerte übereinstimmen.

Mehrfachsumme in geschlossene Form bringen

Beispiel

Man bestimme die Doppelsumme

$$S_n = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} \binom{r}{i} \binom{s}{j} \binom{t}{n-i-j} .$$

Lösung

Man findet heraus, dass die Rekursion

$$(n+1)\, S_{n+1} - (r-n+t+s)\, S_n = 0$$

erfüllt ist. Das Programm errechnet hieraus mit $S_0 = 1$

$$S_n = \binom{r+s+t}{n} .$$

Mehrfachsumme in geschlossene Form bringen

Beispiel

Man bestimme die Doppelsumme

$$S_n = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} \binom{r}{i} \binom{s}{j} \binom{t}{n-i-j} .$$

Lösung

Man findet heraus, dass die Rekursion

$$(n+1)\, S_{n+1} - (r - n + t + s)\, S_n = 0$$

erfüllt ist. Das Programm errechnet hieraus mit $S_0 = 1$

$$S_n = \binom{r+s+t}{n} .$$

Multiplikationskoeffizienten

Beispiel

Berechne eine Rekursion möglichst niedriger Ordnung für die *Multiplikationskoeffizienten* $\gamma_m(n)$ der Darstellung

$$C_n^{(\alpha)}(-x) = \sum_{m=0}^{n} \gamma_m(n) C_m^{(\alpha)}(x)$$

der normierten Charlierpolynome

$$C_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-\alpha)^{n-m} m! \binom{x}{m} .$$

Multiplikationskoeffizienten

Ansatz

- Unter Zuhilfenahme einer erzeugenden Funktion findet man die Darstellung (Chaggara, Koepf 2005)

$$\gamma_m(n) = (-1)^n \alpha^{n-m} \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-n+m)_k (m)_k}{k!}$$

$$\cdot \, {}_1F_1\left(\begin{array}{c} -k \\ m \end{array} \middle| -\alpha \right) (-\alpha)^{-k}$$

für den Multiplikationskoeffizienten als Doppelsumme.

- Hierbei ist ${}_1F_1$ eine (Kummersche) hypergeometrische Reihe.

Multiplikationskoeffizienten

Ansatz

- Unter Zuhilfenahme einer erzeugenden Funktion findet man die Darstellung (Chaggara, Koepf 2005)

$$\gamma_m(n) = (-1)^n \alpha^{n-m} \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-n+m)_k (m)_k}{k!}$$

$$\cdot \, {}_1F_1\left(\begin{matrix} -k \\ m \end{matrix} \middle| -\alpha \right) (-\alpha)^{-k}$$

für den Multiplikationskoeffizienten als Doppelsumme.

- Hierbei ist ${}_1F_1$ eine (Kummersche) hypergeometrische Reihe.

Multiplikationskoeffizienten

Lösung

- Unser Programm errechnet hieraus die Rekursion

$$-\alpha\,(m+2)\,(m+1)\,(m+3)\,\gamma_{m+3}(n)$$

$$-\,(m+2)\,(m+1)\,(1+m+2\,\alpha)\,\gamma_{m+2}(n)$$

$$+\,(m+1)\,(-1-2\,m-2\,\alpha+n)\,\gamma_{m+1}(n)$$

$$+\,(n-m)\,\gamma_m(n)=0$$

sowie eine analoge Rekursion bzgl. n.

- Vorher war nur eine Rekursion vierter Ordnung bekannt (Area, Godoy, Ronveaux, Zarzo 2003).

Multiplikationskoeffizienten

Lösung

- Unser Programm errechnet hieraus die Rekursion

$$
\begin{aligned}
-\alpha\,(m+2)\,(m+1)\,(m+3)\,\gamma_{m+3}(n)\\
-\,(m+2)\,(m+1)\,(1+m+2\,\alpha)\,\gamma_{m+2}(n)\\
+\,(m+1)\,(-1-2\,m-2\,\alpha+n)\,\gamma_{m+1}(n)\\
+\,(n-m)\,\gamma_m(n)=0
\end{aligned}
$$

  sowie eine analoge Rekursion bzgl. n.
- Vorher war nur eine Rekursion vierter Ordnung bekannt (Area, Godoy, Ronveaux, Zarzo 2003).

Vielen Dank für Ihr Interesse!