

Neuere Features des Computeralgebrasystems SINGULAR

Anne Frühbis-Krüger

`anne@mathematik.uni-kl.de`

Departement of Mathematics
University of Kaiserslautern



A Computer Algebra System for Polynomial Computations
with special emphasis on the needs of algebraic geometry, commutative algebra, and
singularity theory



A Computer Algebra System for Polynomial Computations
with special emphasis on the needs of algebraic geometry, commutative algebra, and
singularity theory

G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann
Technische Universität Kaiserslautern
Fachbereich Mathematik; Zentrum für Computer Algebra
D-67663 Kaiserslautern



A Computer Algebra System for Polynomial Computations
with special emphasis on the needs of algebraic geometry, commutative algebra, and
singularity theory

G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann

Technische Universität Kaiserslautern

Fachbereich Mathematik; Zentrum für Computer Algebra

D-67663 Kaiserslautern

Current version: 3.0.2 (August 2006)

Neue Funktionalität:

- Nicht-kommutative Erweiterung

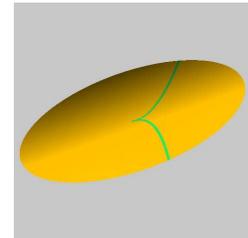
Neue Funktionalität:

- Nicht-kommutative Erweiterung
- dynamische Anbindung von C/C++ - Routinen
- neue Gröbner Basen Variante `slimgb`
- verbesserte Radikalberechnung

Neue Funktionalität:

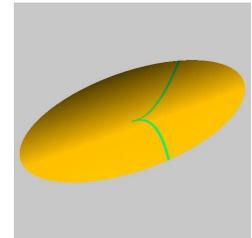
- Nicht-kommutative Erweiterung
- dynamische Anbindung von C/C++ - Routinen
- neue Gröbner Basen Variante `slimgb`
- verbesserte Radikalberechnung
- Auflösung von Singularitäten
- Absolute Faktorisierung

Auflösung von Singularitäten der Kurve $V(x^2 - y^5)$



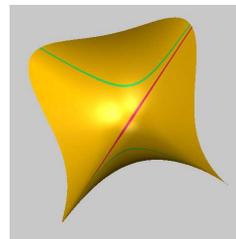
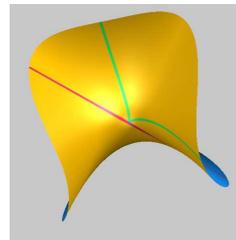
Auflösung von Singularitäten der Kurve $V(x^2 - y^5)$

Nur ein singulärer Punkt: $V(x, y)$

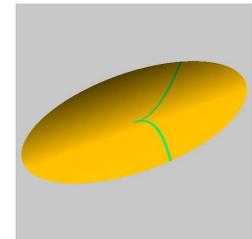


Auflösung von Singularitäten der Kurve $V(x^2 - y^5)$

Nur ein singulärer Punkt: $V(x, y)$

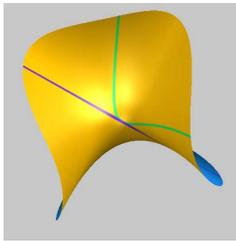


$BlowUp$
→

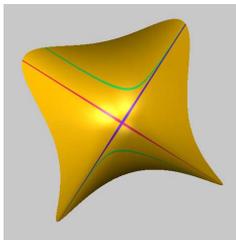
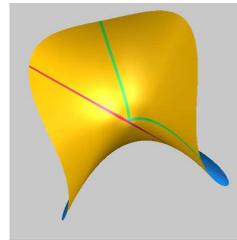


Auflösung von Singularitäten der Kurve $V(x^2 - y^5)$

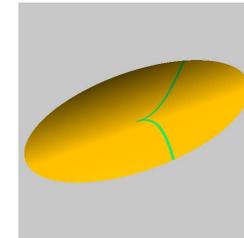
Nur ein singulärer Punkt: $V(x, y)$



$\xrightarrow{\text{BlowUp}}$



$\xrightarrow{\text{BlowUp}}$



Eigenschaften des singulären Ortes:

Kurven

Höhere Dimensionen

Eigenschaften des singulären Ortes:

Kurven

Höhere Dimensionen

Menge von Punkten

i.a. nicht nulldimensional

Eigenschaften des singulären Ortes:

Kurven

Menge von Punkten

Komponenten disjunkt

Komponenten glatt

Höhere Dimensionen

i.a. nicht nulldimensional

Komponenten schneiden sich

singuläre Komponenten

Eigenschaften des singulären Ortes:

Kurven

Menge von Punkten

Komponenten disjunkt

Komponenten glatt

Höhere Dimensionen

i.a. nicht nulldimensional

Komponenten schneiden sich

singuläre Komponenten

Problem:

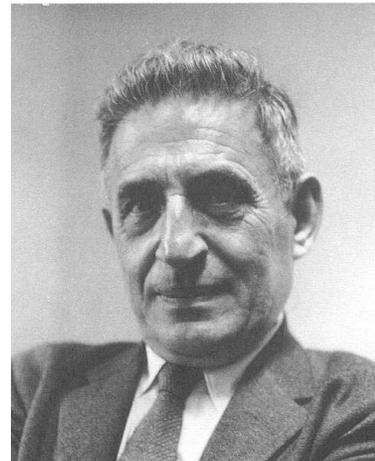
Zentren für Aufblasungen sollen **nicht** singulär sein

- Kurven(1890s): L. Kronecker, M. Noether and A.Brill

- Kurven(1890s): L. Kronecker, M. Noether and A.Brill
- Flächen, lokal (1908): H. W. Jung
- Flächen (1920s): O. Chisini, G. Albanese and F. Severi
- Flächen, global (1935): R.J. Walker

- Kurven(1890s): L. Kronecker, M. Noether and A.Brill
- Flächen, lokal (1908): H. W. Jung
- Flächen (1920s): O. Chisini, G. Albanese and F. Severi
- Flächen, global (1935): R.J. Walker

- O. Zariski 1930s/1940s
- H. Hironaka 1964



Algorithmische Beweise:

- E. Bierstone, P. Milman
- O. Villamayor, S. Encinas
- H. Hauser, S. Encinas

Algorithmische Beweise:

- E. Bierstone, P. Milman
- O. Villamayor, S. Encinas
- H. Hauser, S. Encinas

Implementierungen:

- G. Bodnár and J. Schicho
Erste Implementierung von Villamayors Algorithmus
(ohne Modifikationen)

Algorithmische Beweise:

- E. Bierstone, P. Milman
- O. Villamayor, S. Encinas
- H. Hauser, S. Encinas

Implementierungen:

- G. Bodnár and J. Schicho
Erste Implementierung von Villamayors Algorithmus
(ohne Modifikationen)
- Implementierung in **SINGULAR** Modifikationen des Algorithmus
(gemeinsame Arbeit mit **G.Pfister**)

Die algorithmische Aufgabenstellung

geg.: algebraische Varietät X , über Körper der Char. 0

Ziel: Desingularisierung von X

geg.: algebraische Varietät X , über Körper der Char. 0

Ziel: Desingularisierung von X

- nicht-singuläre Varietät \tilde{X}
- eigentlicher, birationaler Morphismus $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ so daß
 $\text{Reg}(X) \cong \pi^{-1}(\text{Reg}(X))$

geg.: algebraische Varietät X , über Körper der Char. 0

Ziel: Desingularisierung von X

- nicht-singuläre Varietät \tilde{X}
- eigentlicher, birationaler Morphismus $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ so daß
 $\text{Reg}(X) \cong \pi^{-1}(\text{Reg}(X))$

Konstruktion von π als **endliche Folge von Aufblasungen**

geg.: algebraische Varietät X , über Körper der Char. 0

Ziel: Desingularisierung von X

- nicht-singuläre Varietät \tilde{X}
- eigentlicher, birationaler Morphismus $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ so daß
 $\text{Reg}(\tilde{X}) \cong \pi^{-1}(\text{Reg}(X))$

Konstruktion von π als **endliche Folge von Aufblasungen**

\implies 2 Teilaufgaben:

- Berechnung einer Aufblasung bei gegebenem Zentrum
- Bestimmung eines geeigneten Zentrums

Sei W algebraische Varietät, $C \subseteq W$ abg. Untervarietät mit Idealgarbe $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{O}_W$.

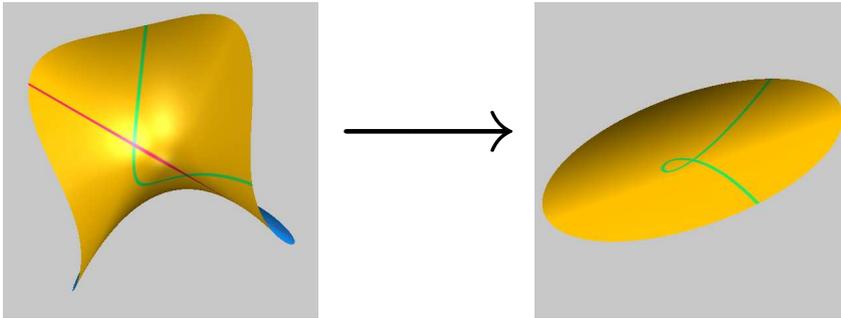
Die **Aufblasung** von W mit **Zentrum** C ist

$$\pi : \widetilde{W} := \text{Proj}\left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{K}^n\right) \rightarrow W.$$

Sei W algebraische Varietät, $C \subseteq W$ abg. Untervarietät mit Idealgarbe $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{O}_W$.

Die **Aufblasung** von W mit **Zentrum** C ist

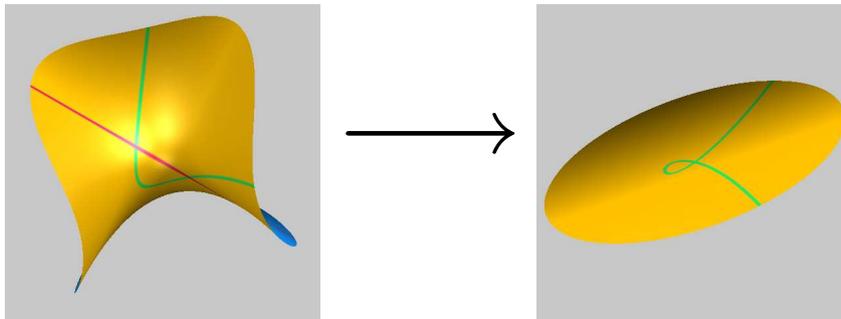
$$\pi : \widetilde{W} := \text{Proj}\left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{K}^n\right) \rightarrow W.$$



Sei W algebraische Varietät, $C \subseteq W$ abg. Untervarietät mit Idealgarbe $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{O}_W$.

Die **Aufblasung** von W mit **Zentrum** C ist

$$\pi : \widetilde{W} := \text{Proj}\left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{K}^n\right) \rightarrow W.$$



Universelle Eigenschaft der Aufblasung:

Sei $f : Y \rightarrow W$ ein Morphismus mit $\mathcal{K}\mathcal{O}_Y$ **lokal Hauptidealgarbe**.

Dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $g : Y \rightarrow \widetilde{W}$ mit $f = \pi \circ g$.

Die Aufblasung mit Zentrum C hat folgende Eigenschaften:

- (1) \widetilde{W} ist eine **algebraische Varietät**.
- (2) π ist **eigentlich**.

Die Aufblasung mit Zentrum C hat folgende Eigenschaften:

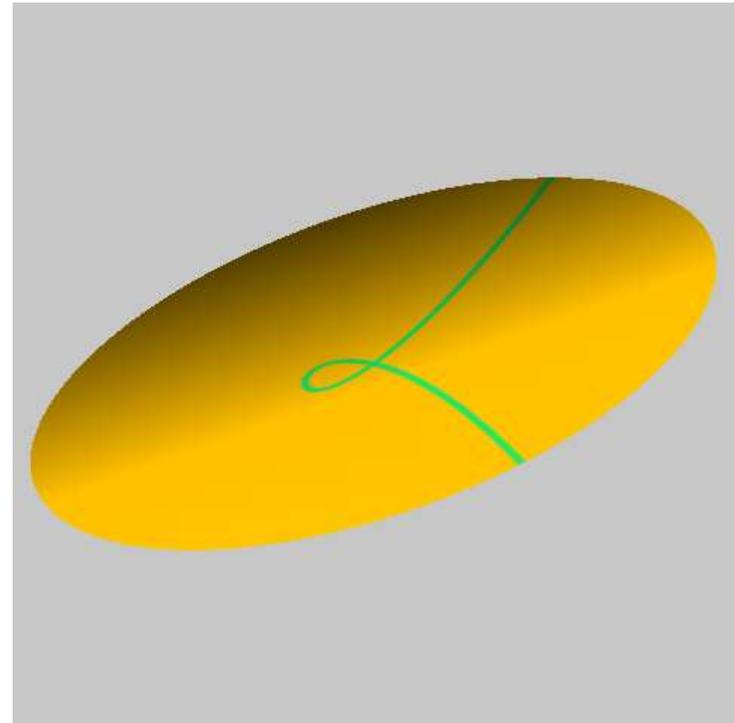
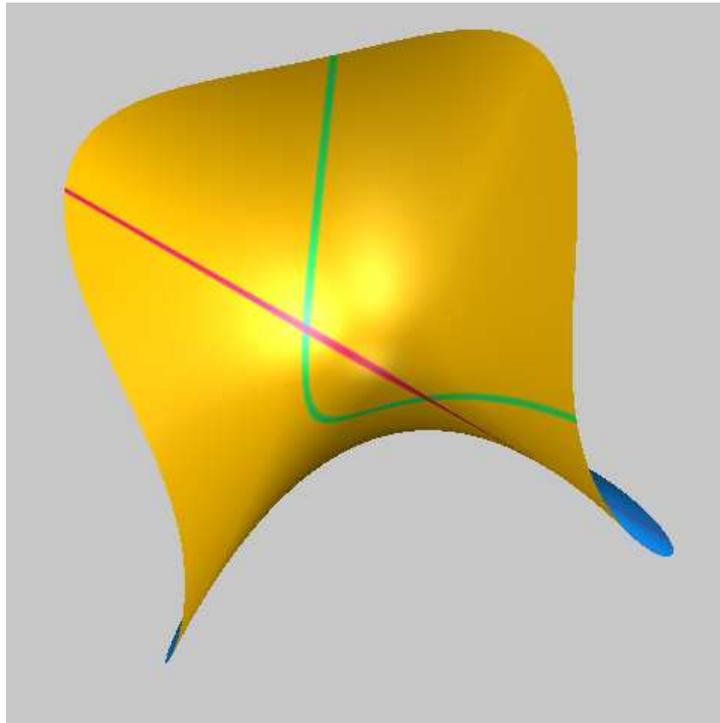
- (1) \widetilde{W} ist eine **algebraische Varietät**.
- (2) π ist **eigentlich**.
- (3) π induziert einen **Isomorphismus** über $W \setminus C$
- (4) $\mathcal{K}O_{\widetilde{W}}$ ist **lokal Hauptidealgarbe**.
- (5) Ist W projektiv, so ist auch \widetilde{W} **projektiv**

Die Aufblasung mit Zentrum C hat folgende Eigenschaften:

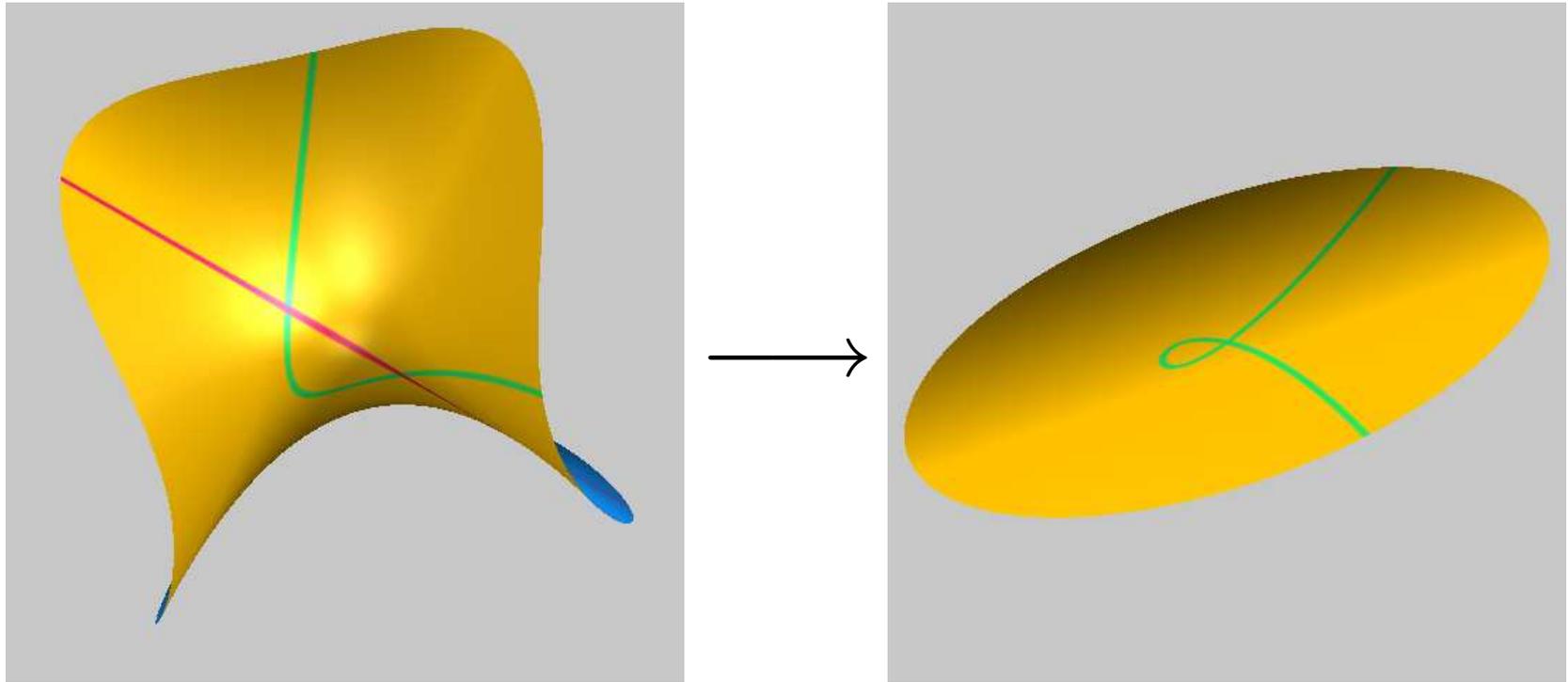
- (1) \widetilde{W} ist eine **algebraische Varietät**.
- (2) π ist **eigentlich**.
- (3) π induziert einen **Isomorphismus** über $W \setminus C$
- (4) $\mathcal{K}O_{\widetilde{W}}$ ist **lokal Hauptidealgarbe**.
- (5) Ist W projektiv, so ist auch \widetilde{W} **projektiv**

$\mathcal{K}O_{\widetilde{W}}$ wird als **exzeptioneller Divisor** von π bezeichnet.

Aufblasung eines rationalen Doppelpunktes

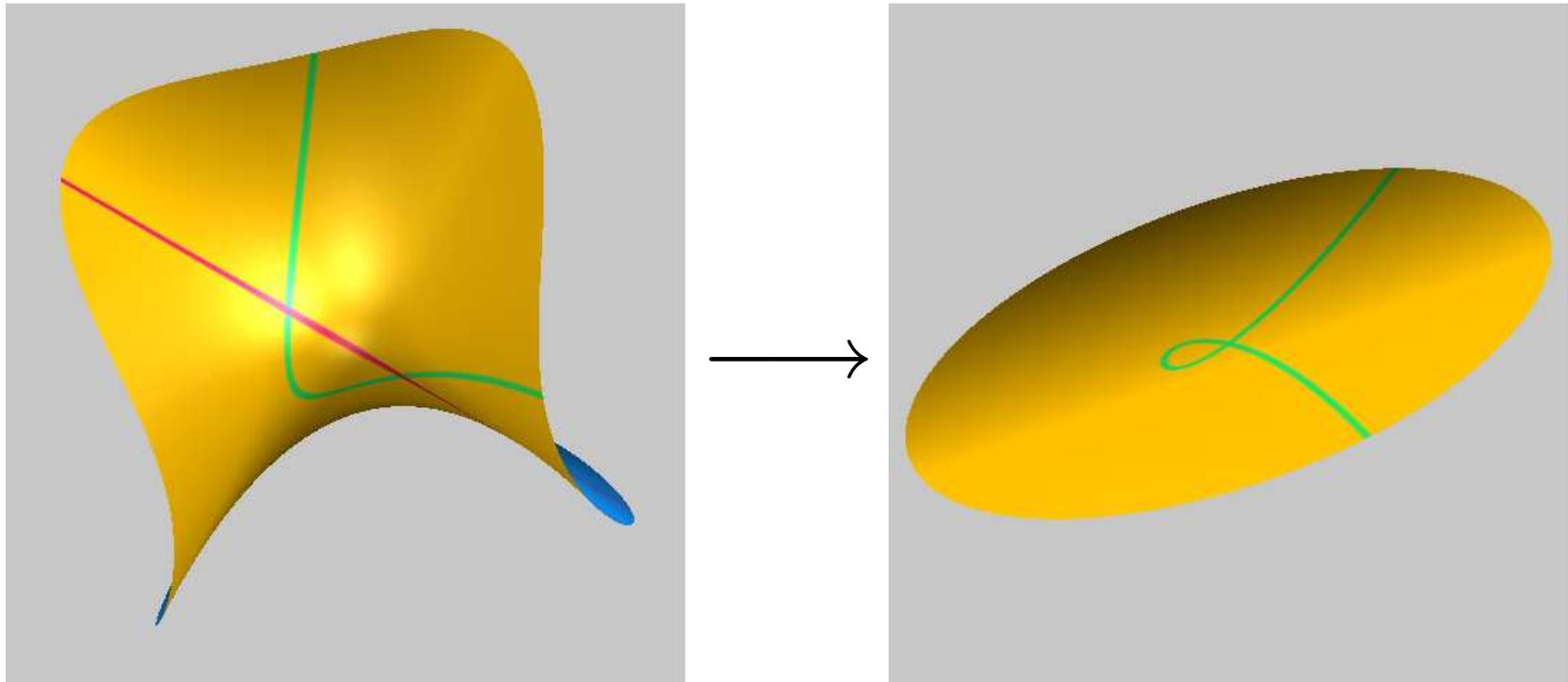


Aufblasung eines rationalen Doppelpunktes



$$\pi : X = \{(x, y; u : v) \in K^2 \times \mathbb{P}^1 \mid xv = yu\} \longrightarrow K^2.$$

Aufblasung eines rationalen Doppelpunktes



$$\pi : X = \{(x, y; u : v) \in K^2 \times \mathbb{P}^1 \mid xv = yu\} \longrightarrow K^2.$$

Für Berechnungszwecke: Überdecken von \mathbb{P}^1 durch affine Karten!

$U \subset W$ affine offene Teilmenge

$A := \Gamma(U, \mathcal{O}_W)$

$K := \Gamma(U, \mathcal{K}) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \subseteq A$

Aufblasung von U mit Zentrum $C \cap U$

$$\pi^{-1}(U) = \mathbf{Proj}\left(\bigoplus_{n \geq 0} K^n\right) = \bigcup_{i=1}^m \mathbf{Spec} A \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{f_m}{f_i} \right].$$

$U \subset W$ affine offene Teilmenge

$A := \Gamma(U, \mathcal{O}_W)$

$K := \Gamma(U, \mathcal{K}) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \subseteq A$

Aufblasung von U mit Zentrum $C \cap U$

$$\pi^{-1}(U) = \mathbf{Proj}\left(\bigoplus_{n \geq 0} K^n\right) = \bigcup_{i=1}^m \mathbf{Spec} A \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{f_m}{f_i} \right].$$

Berechnung der Aufblasung:

- $\Phi : A[y_1, \dots, y_m] \longrightarrow \bigoplus_{n \geq 0} K^n t^n \subseteq A[t]$ mit $\Phi(y_i) = t f_i$.
- $\bigoplus_{n \geq 0} K^n \cong A[y_1, \dots, y_m] / \mathbf{Ker}(\Phi)$
- $\pi^{-1}(U) \cong V(\mathbf{Ker}(\Phi)) \subseteq \mathbf{Spec}(A) \times \mathbb{P}^{m-1}$.

$X = V(J) \subset W$ Untervarietät

- **Totale Transformierte** von X :
 $\pi^*(X)$ Untervarietät von \widetilde{W} definiert durch $\pi^*(J) = JO_{\widetilde{W}}$.
- **Strikte Transformierte** von X :
 \widetilde{X} Zariski Abschluß von $\pi^{-1}(X \setminus V(\mathcal{K}))$ in \widetilde{W}
mit Idealgarbe $\widetilde{J} := JO_{\widetilde{W}} : \mathcal{K}O_{\widetilde{W}}^\infty$.

$X = V(J) \subset W$ Untervarietät

- **Totale Transformierte** von X :
 $\pi^*(X)$ Untervarietät von \widetilde{W} definiert durch $\pi^*(J) = JO_{\widetilde{W}}$.
- **Strikte Transformierte** von X :
 \widetilde{X} Zariski Abschluß von $\pi^{-1}(X \setminus V(\mathcal{K}))$ in \widetilde{W}
mit Idealgarbe $\widetilde{J} := JO_{\widetilde{W}} : \mathcal{K}O_{\widetilde{W}}^\infty$.
- **Exzeptionelle Hyperfläche**:
 E reduzierte Untervarietät von \widetilde{W} definiert durch $\mathcal{K}O_{\widetilde{W}}$.
zugehörige Idealgarbe: $I(E)$

$X = V(J) \subset W$ Untervarietät

- **Totale Transformierte** von X :
 $\pi^*(X)$ Untervarietät von \widetilde{W} definiert durch $\pi^*(J) = J\mathcal{O}_{\widetilde{W}}$.
- **Strikte Transformierte** von X :
 \widetilde{X} Zariski Abschluß von $\pi^{-1}(X \setminus V(\mathcal{K}))$ in \widetilde{W}
mit Idealgarbe $\widetilde{J} := J\mathcal{O}_{\widetilde{W}} : \mathcal{K}\mathcal{O}_{\widetilde{W}}^\infty$.
- **Exzeptionelle Hyperfläche**:
 E reduzierte Untervarietät von \widetilde{W} definiert durch $\mathcal{K}\mathcal{O}_{\widetilde{W}}$.
zugehörige Idealgarbe: $I(E)$
- **Schwache Transformierte** von X : \overline{X} , definiert durch Idealgarbe \overline{J} mit

$$J\mathcal{O}_{\widetilde{W}} = I(E)^c \overline{J} \quad \text{and} \quad I(E) \nmid \overline{J}.$$

$$J = \langle xy, x^3 + y^3 + z^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z] = \mathcal{O}_W$$

(Raumkurve mit einziger Singularität im Koordinatenursprung)

Zentrum: $K = \langle x, y, z \rangle$.

$$\widetilde{W} = \{(x, y, z; u : v : w) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid uy - xv = uz - xw = vz - yw = 0\}$$

$$J = \langle xy, x^3 + y^3 + z^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z] = \mathcal{O}_W$$

(Raumkurve mit einziger Singularität im Koordinatenursprung)

Zentrum: $K = \langle x, y, z \rangle$.

$$\widetilde{W} = \{(x, y, z; u : v : w) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid uy - xv = uz - xw = vz - yw = 0\}$$

Karte 1: $u \neq 0$	$I(H)$	$=$	$\langle x \rangle$
	$\pi^*(J)$	$=$	$\langle x^2v, x^3 + x^3v^3 + x^3w^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x, v, w]$
	\widetilde{J}	$=$	$\langle v, 1 + w^3 \rangle$
	\overline{J}	$=$	$\langle v, x + xv^3 + xw^3 \rangle = \langle v, 1 + w^3 \rangle \cap \langle v, x \rangle$

$$J = \langle xy, x^3 + y^3 + z^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z] = \mathcal{O}_W$$

(Raumkurve mit einziger Singularität im Koordinatenursprung)

Zentrum: $K = \langle x, y, z \rangle$.

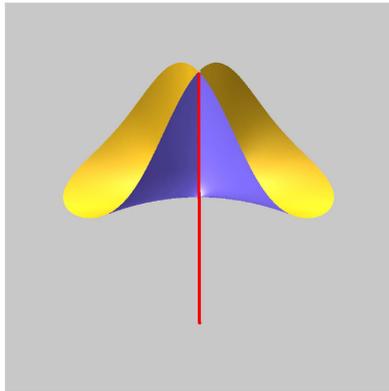
$$\widetilde{W} = \{(x, y, z; u : v : w) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid uy - xv = uz - xw = vz - yw = 0\}$$

Karte 1: $u \neq 0$

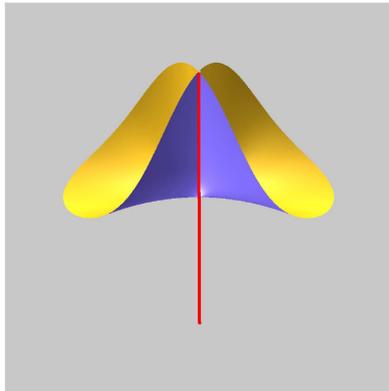
$$\begin{aligned} I(H) &= \langle x \rangle \\ \pi^*(J) &= \langle x^2v, x^3 + x^3v^3 + x^3w^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x, v, w] \\ \widetilde{J} &= \langle v, 1 + w^3 \rangle \\ \overline{J} &= \langle v, x + xv^3 + xw^3 \rangle = \langle v, 1 + w^3 \rangle \cap \langle v, x \rangle \end{aligned}$$

Karte 3: $w \neq 0$

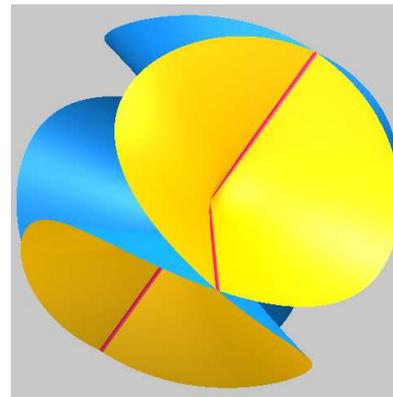
$$\begin{aligned} I(H) &= \langle z \rangle \\ \pi^*(J) &= \langle uvz^2, u^3z^3 + v^3z^3 + z^3 \rangle \subset \mathbb{C}[u, v, z] \\ \widetilde{J} &= \langle uv, u^3 + v^3 + 1 \rangle = \langle u, 1 + v^3 \rangle \cap \langle v, 1 + u^3 \rangle \\ \overline{J} &= \langle uv, u^3z + v^3z + z \rangle = \langle u, 1 + v^3 \rangle \cap \langle u, z \rangle \cap \langle v, z \rangle \end{aligned}$$



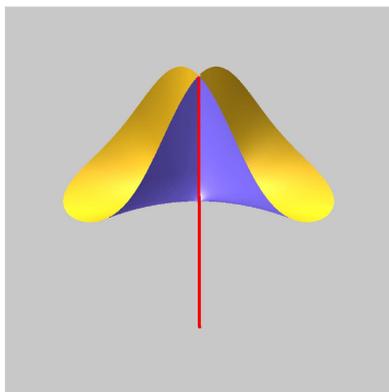
● Gleichung: $z^2 - xy^2$



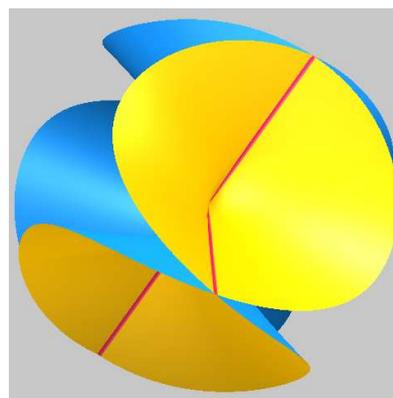
● Gleichung: $z^2 = xy^2$



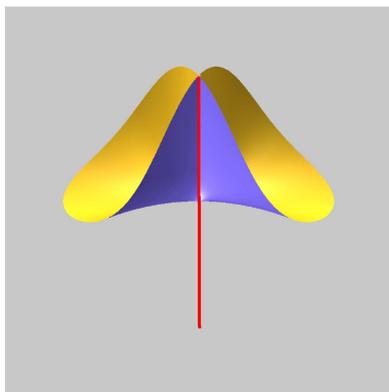
● Gleichung: $z^2 = x^2y^2$



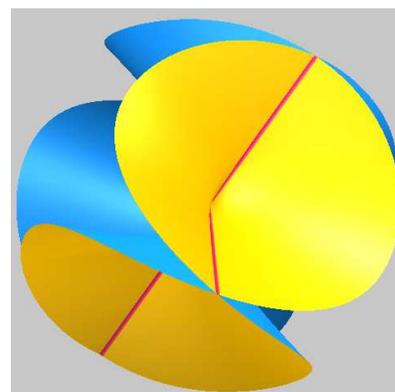
- Gleichung: $z^2 - xy^2$
- Singulärer Ort:
 $V(y^2, xy, z) = V(y, z)$



- Gleichung: $z^2 - x^2y^2$
- Singulärer Ort:
 $V(x^2y, xy^2, z) = V(xy, z)$



- Gleichung: $z^2 - xy^2$
- Singulärer Ort:
 $V(y^2, xy, z) = V(y, z)$
- $\langle y^2, xy, z \rangle =$
 $\langle y^2, x, z \rangle \cap \langle y, z \rangle$



- Gleichung: $z^2 - x^2y^2$
- Singulärer Ort:
 $V(x^2y, xy^2, z) = V(xy, z)$
- $\langle x^2y, xy^2, z \rangle = \langle x^2, y^2, z \rangle \cap$
 $\langle x, z \rangle \cap \langle y, z \rangle$

Whitneys Regenschirm: $\langle z^2 - xy^2 \rangle$

$$J = \langle z^2 - xy^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z] = \mathcal{O}_W$$

Zentrum (Versuch 1): $K = \langle x, y, z \rangle$.

Whitneys Regenschirm: $\langle z^2 - xy^2 \rangle$

$$J = \langle z^2 - xy^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z] = \mathcal{O}_W$$

Zentrum (Versuch 1): $K = \langle x, y, z \rangle$.

Somit

$$\widetilde{W} = \{(x, y, z; u : v : w) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid uy - xv = uz - xw = vz - yw = 0\}$$

Whitneys Regenschirm: $\langle z^2 - xy^2 \rangle$

$$J = \langle z^2 - xy^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z] = \mathcal{O}_W$$

Zentrum (Versuch 1): $K = \langle x, y, z \rangle$.

Somit

$$\widetilde{W} = \{(x, y, z; u : v : w) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid uy - xv = uz - xw = vz - yw = 0\}$$

$$\begin{array}{l} I(H) = \langle x \rangle \\ \text{Karte 1: } u \neq 0 \quad \pi^*(J) = \langle x^2 w^2 - x^3 v^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x, v, w] \\ \quad \widetilde{J} = \langle w^2 - xv^2 \rangle \end{array}$$

Whitneys Regenschirm: $\langle z^2 - xy^2 \rangle$

$$J = \langle z^2 - xy^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z] = \mathcal{O}_W$$

Zentrum (Versuch 1): $K = \langle x, y, z \rangle$.

Somit

$$\widetilde{W} = \{(x, y, z; u : v : w) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid uy - xv = uz - xw = vz - yw = 0\}$$

$$I(H) = \langle x \rangle$$

$$\text{Karte 1: } u \neq 0 \quad \pi^*(J) = \langle x^2w^2 - x^3v^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x, v, w]$$

$$\widetilde{J} = \langle w^2 - xv^2 \rangle$$

\implies **Keine Verbesserung**

Erfolgreicheres Zentrum: $K = \langle z, y \rangle$ (**nicht-singulär** nach Aufblasung)

$$\langle z^2 - x^2y^2 \rangle$$

$$J = \langle z^2 - x^2y^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z] = \mathcal{O}_W$$

Wahl des Zentrums:

- $K = \langle xy, z \rangle$ nicht glatt, nicht möglich

$$\langle z^2 - x^2y^2 \rangle$$

$$J = \langle z^2 - x^2y^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z] = \mathcal{O}_W$$

Wahl des Zentrums:

- $K = \langle xy, z \rangle$ nicht glatt, nicht möglich
- $K = \langle x, z \rangle$ or $K = \langle y, z \rangle$
Symmetrie in x and y , müssen zufällige Wahl vermeiden

$$\langle z^2 - x^2y^2 \rangle$$

$$J = \langle z^2 - x^2y^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z] = \mathcal{O}_W$$

Wahl des Zentrums:

- $K = \langle xy, z \rangle$ nicht glatt, nicht möglich
- $K = \langle x, z \rangle$ or $K = \langle y, z \rangle$
Symmetrie in x and y , müssen zufällige Wahl vermeiden
- $K = \langle x, y, z \rangle$ einzig verbleibende Wahl

Somit

$$\widetilde{W} = \{(x, y, z; u : v : w) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid uy - xv = uz - xw = vz - yw = 0\}$$

$$\langle z^2 - x^2y^2 \rangle$$

$$J = \langle z^2 - x^2y^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z] = \mathcal{O}_W$$

Wahl des Zentrums:

- $K = \langle xy, z \rangle$ nicht glatt, nicht möglich
- $K = \langle x, z \rangle$ or $K = \langle y, z \rangle$
Symmetrie in x and y , müssen zufällige Wahl vermeiden
- $K = \langle x, y, z \rangle$ einzig verbleibende Wahl

Somit

$$\widetilde{W} = \{(x, y, z; u : v : w) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid uy - xv = uz - xw = vz - yw = 0\}$$

$$I(H) = \langle x \rangle$$

$$\text{Karte 1: } u \neq 0 \quad \pi^*(J) = \langle x^2w^2 - x^4v^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x, v, w]$$

$$\widetilde{J} = \langle w^2 - x^2v^2 \rangle$$

\implies **Verbesserung:** Symmetrie in x and y beseitigt,
eine der Geraden liegt im exzept. Divisor!

- W
reindimensionale, glatte alg. Varietät der Dimension d ,
- $X \subseteq W$
Unterschema, dessen Singularitäten aufgelöst werden sollen

- W
reindimensionale, glatte alg. Varietät der Dimension d ,
- $X \subseteq W$
Unterschema, dessen Singularitäten aufgelöst werden sollen
- Liste exzept. Divisoren $E = \{H_1, \dots, H_k\}$
chronologisch geordnete Menge von Hyperflächen mit
normalen Schnitten in W

- W
reindimensionale, glatte alg. Varietät der Dimension d ,
- $X \subseteq W$
Unterschema, dessen Singularitäten aufgelöst werden sollen
- Liste exzept. Divisoren $E = \{H_1, \dots, H_k\}$
chronologisch geordnete Menge von Hyperflächen mit
normalen Schnitten in W
 - **normale Schnitte:**
Für alle $y \in \bigcup_{H \in E} H$ existiert ein reguläres Parametersystem f_1, \dots, f_k für
 $y \in W$ so daß E lokal durch die Gleichung $f_1 \cdot \dots \cdot f_e = 0$ gegeben ist.

- W
reindimensionale, glatte alg. Varietät der Dimension d ,
- $X \subseteq W$
Unterschema, dessen Singularitäten aufgelöst werden sollen
- Liste exzept. Divisoren $E = \{H_1, \dots, H_k\}$
chronologisch geordnete Menge von Hyperflächen mit
normalen Schnitten in W
 - **normale Schnitte:**
Für alle $y \in \bigcup_{H \in E} H$ existiert ein reguläres Parametersystem f_1, \dots, f_k für
 $y \in W$ so daß E lokal durch die Gleichung $f_1 \cdot \dots \cdot f_e = 0$ gegeben ist.
- weitere Informationen aus vorherigen Aufblasungen

- W
reindimensionale, glatte alg. Varietät der Dimension d ,
- $X \subseteq W$
Unterschema, dessen Singularitäten aufgelöst werden sollen
- Liste exzept. Divisoren $E = \{H_1, \dots, H_k\}$
chronologisch geordnete Menge von Hyperflächen mit
normalen Schnitten in W
 - **normale Schnitte:**
Für alle $y \in \bigcup_{H \in E} H$ existiert ein reguläres Parametersystem f_1, \dots, f_k für
 $y \in W$ so daß E lokal durch die Gleichung $f_1 \cdot \dots \cdot f_e = 0$ gegeben ist.
- weitere Informationen aus vorherigen Aufblasungen

Strategie der Zentrumswahl: Wähle 'schlimmste' Punkte

Welches sind die 'schlimmsten' Punkte?

Kernpunkt des Auflösungsalgorithmus: Wahl geeigneter Zentren
gesteuert durch eine **Invariante**

$$f_{(Input\ Data)} : X \longrightarrow \mathcal{I}$$

die jedem Punkt in X einen Wert in einer totalgeordneten Menge \mathcal{I}
zuordnet, so daß:

Kernpunkt des Auflösungsalgorithmus: Wahl geeigneter Zentren gesteuert durch eine **Invariante**

$$f_{(\text{Input Data})} : X \longrightarrow \mathcal{I}$$

die jedem Punkt in X einen Wert in einer totalgeordneten Menge \mathcal{I} zuordnet, so daß:

- Invariante Zariski-**oberhalbstetig**, (Maximalort abgeschlossen).
- **Maximalort** nicht-singulär, normale Schnitte mit E – zulässiges Zentrum.

Kernpunkt des Auflösungsalgorithmus: Wahl geeigneter Zentren
gesteuert durch eine **Invariante**

$$f_{(\text{Input Data})} : X \longrightarrow \mathcal{I}$$

die jedem Punkt in X einen Wert in einer totalgeordneten Menge \mathcal{I} zuordnet, so daß:

- Invariante Zariski-**oberhalbstetig**, (Maximalort abgeschlossen).
- **Maximalort** nicht-singulär, normale Schnitte mit E – zulässiges Zentrum.
- Invariant infinitesimal oberhalbstetig (kein Anstieg unter Aufblasungen).
- Fallen des Maximalwertes im Verlauf der Aufblasungen des Auflösungsprozesses.

Kernpunkt des Auflösungsalgorithmus: Wahl geeigneter Zentren
gesteuert durch eine **Invariante**

$$f_{(\text{Input Data})} : X \longrightarrow \mathcal{I}$$

die jedem Punkt in X einen Wert in einer totalgeordneten Menge \mathcal{I} zuordnet, so daß:

- Invariante Zariski-**oberhalbstetig**, (Maximalort abgeschlossen).
- **Maximalort** nicht-singulär, normale Schnitte mit E – zulässiges Zentrum.
- Invariant infinitesimal oberhalbstetig (kein Anstieg unter Aufblasungen).
- Fallen des Maximalwertes im Verlauf der Aufblasungen des Auflösungsprozesses.
- Invariante ist intrinsisch.

Kernpunkt des Auflösungsalgorithmus: Wahl geeigneter Zentren gesteuert durch eine **Invariante**

$$f_{(\text{Input Data})} : X \longrightarrow \mathcal{I}$$

die jedem Punkt in X einen Wert in einer totalgeordneten Menge \mathcal{I} zuordnet, so daß:

- Invariante Zariski-**oberhalbstetig**, (Maximalort abgeschlossen).
- **Maximalort** nicht-singulär, normale Schnitte mit E – zulässiges Zentrum.
- Invariant infinitesimal oberhalbstetig (kein Anstieg unter Aufblasungen).
- Fallen des Maximalwertes im Verlauf der Aufblasungen des Auflösungsprozesses.
- Invariante ist intrinsisch.

Konstruktion der Invariante mittels Induktion über Dimension des umgebenden Raumes; verschiedene Varianten.

- W nicht-singulär, $J \subseteq \mathcal{O}_W$ Idealgarbe und $w \in W$. Ordnung in w bzgl. J :

$$v_J(w) = \sup\{m \mid J_w \subseteq \mathfrak{m}_{W,w}^m\}.$$

$v_J : W \rightarrow \mathbb{N}$ ist oberhalbstetig.

- W nicht-singulär, $J \subseteq \mathcal{O}_W$ Idealgarbe und $w \in W$. Ordnung in w bzgl. J :

$$v_J(w) = \sup\{m \mid J_w \subseteq \mathfrak{m}_{W,w}^m\}.$$

$v_J : W \rightarrow \mathbb{N}$ ist oberhalbstetig.

- **b -singulärer Ort von J** , d.h. Menge der Punkte der Ordnung $\geq b$:

$$\text{Sing}_b(J) := \{w \in W \mid v_J(w) \geq b\}.$$

- W nicht-singulär, $J \subseteq \mathcal{O}_W$ Idealgarbe und $w \in W$. Ordnung in w bzgl. J :

$$v_J(w) = \sup\{m \mid J_w \subseteq \mathfrak{m}_{W,w}^m\}.$$

$v_J : W \rightarrow \mathbb{N}$ ist oberhalbstetig.

- **b -singulärer Ort von J** , d.h. Menge der Punkte der Ordnung $\geq b$:

$$\text{Sing}_b(J) := \{w \in W \mid v_J(w) \geq b\}.$$

Weiterer möglicher Baustein: Hilbert-Samuel Function

$$\begin{aligned} HS_{X,w} : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ d &\longmapsto \dim_{\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_w^{d+1}} \end{aligned}$$

- $v_J(w)$ (alternativ $HS_{J,w}$)
- Anzahl $n_E(w)$ gewisser exzept. Divisoren, die w treffen

- $v_J(w)$ (alternativ $HS_{J,w}$)
- Anzahl $n_E(w)$ gewisser exzept. Divisoren, die w treffen

Frage: Reicht das zur Bestimmung eines Zentrums?

- $v_J(w)$ (alternativ $HS_{J,w}$)
- Anzahl $n_E(w)$ gewisser exzept. Divisoren, die w treffen

Frage: Reicht das zur Bestimmung eines Zentrums?

Beispiel: $V(z^2 - x^2y^2) \subset \mathbb{C}^3$, $E = \emptyset$

- Maximalwert von $(v_J(w), n_E(w))$: $(2, 0)$
- Maximalort: $V(xy, z)$

- $v_J(w)$ (alternativ $HS_{J,w}$)
- Anzahl $n_E(w)$ gewisser exzept. Divisoren, die w treffen

Frage: Reicht das zur Bestimmung eines Zentrums?

Beispiel: $V(z^2 - x^2y^2) \subset \mathbb{C}^3$, $E = \emptyset$

- Maximalwert von $(v_J(w), n_E(w))$: $(2, 0)$
- Maximalort: $V(xy, z)$

Antwort: **Nein!** Wir müssen noch die 'schlimmsten' Punkte des Maximalortes untersuchen.

Ziel: Finde (lokal) eine Hyperfläche Z in W so daß:

- Hyperfläche Maximalort der Invariante enthält

Ziel: Finde (lokal) eine Hyperfläche Z in W so daß:

- Hyperfläche Maximalort der Invariante enthält
- und dies auch nach Aufblasungen in Zentren im Maximal weiterhin tut

Ziel: Finde (lokal) eine Hyperfläche Z in W so daß:

- Hyperfläche Maximalort der Invariante enthält
- und dies auch nach Aufblasungen in Zentren im Maximal weiterhin tut
- Hyperfläche normale Schnitte mit exzept. Divisoren hat sowie weitere gute Schnitteigenschaften

Ziel: Finde (lokal) eine Hyperfläche Z in W so daß:

- Hyperfläche Maximalort der Invariante enthält
- und dies auch nach Aufblasungen in Zentren im Maximal weiterhin tut
- Hyperfläche normale Schnitte mit exzept. Divisoren hat sowie weitere gute Schnitteigenschaften

Nachteil: Solch eine Hyperfläche existiert nur lokal!

Lokale Struktur der Invariante:

$$\underbrace{(v_J(w), n_E(w))}_{\text{in } W}; \underbrace{(v_J(w), n_E(w))}_{\text{in } Z}; \dots$$

Was kann als Hilfsobjekt (X_{neu}) benutzt werden?

Was kann als Hilfsobjekt (X_{neu}) benutzt werden?

Ideal des Maximalortes nicht ausreichend verträglich mit
Aufblasungen

Was kann als Hilfsobjekt (X_{neu}) benutzt werden?

Ideal des Maximalortes nicht ausreichend verträglich mit
Aufblasungen

Koeffizienten Ideal:

$$\text{Coeff}_Z(J_X) = \sum_{i=0}^{b-1} (\Delta^i(J_X)) \mathcal{O}_Z^{\frac{b!}{b-i}}$$

mit $b = \text{Ordnung von } J$

Ordnung verträglich mit schwachen Transformierten, aber i.a. nicht
mit strikten.

Was kann als Hilfsobjekt (X_{neu}) benutzt werden?

Ideal des Maximalortes nicht ausreichend verträglich mit
Aufblasungen

Koeffizienten Ideal:

$$\text{Coeff}_Z(J_X) = \sum_{i=0}^{b-1} (\Delta^i(J_X)) \mathcal{O}_Z^{\frac{b!}{b-i}}$$

mit $b = \text{Ordnung von } J$

Ordnung verträglich mit schwachen Transformierten, aber i.a. nicht
mit strikten.

Induktive Struktur via Dimensionsabstieg

Induktive Struktur via Dimensionsabstieg

In jeder Dimension k des umgebenden Raumes:

- neues W = Hyperfläche maximalen Kontaktes in Dimension $k + 1$

Induktive Struktur via Dimensionsabstieg

In jeder Dimension k des umgebenden Raumes:

- neues W = Hyperfläche maximalen Kontaktes in Dimension $k + 1$
- neues X = konstruiert aus Maximalort in Dimension $k + 1$
(Coeff)
(technisch aufwendig, um ausreichend Information zu bewahren)
- neues E = exzept.Divisoren, die nach letztem Fall der Ordnung in Dimension $k + 1$ entstanden sind

Induktive Struktur via Dimensionsabstieg

In jeder Dimension k des umgebenden Raumes:

- neues W = Hyperfläche maximalen Kontaktes in Dimension $k + 1$
- neues X = konstruiert aus Maximalort in Dimension $k + 1$
(Coeff)
(technisch aufwendig, um ausreichend Information zu bewahren)
- neues E = exzept.Divisoren, die nach letztem Fall der Ordnung in Dimension $k + 1$ entstanden sind

zugehörige Invariante: (v_J, n_E)

Induktive Struktur via Dimensionsabstieg

In jeder Dimension k des umgebenden Raumes:

- neues W = Hyperfläche maximalen Kontaktes in Dimension $k + 1$
- neues X = konstruiert aus Maximalort in Dimension $k + 1$
(Coeff)
(technisch aufwendig, um ausreichend Information zu bewahren)
- neues E = exzept.Divisoren, die nach letztem Fall der Ordnung in Dimension $k + 1$ entstanden sind

zugehörige Invariante: (v_J, n_E)

einzig mögliche Ausnahme: (HS_J, n_E) in Dimension d

Allgemeine Strategie:

Wahl eines geeigneten Zentrums für Dimension k liefert zulässiges Zentrum für Dimension $k + 1$

Allgemeine Strategie:

Wahl eines geeigneten Zentrums für Dimension k liefert zulässiges Zentrum für Dimension $k + 1$

Auflösung des Hilfsobjektes in Dimension k liefert Auflösung von Singularitäten des Maximalortes von Dimension $k + 1$

⇒ schließlich ganzer Maximalort zulässig

Allgemeine Strategie:

Wahl eines geeigneten Zentrums für Dimension k liefert zulässiges Zentrum für Dimension $k + 1$

Auflösung des Hilfsobjektes in Dimension k liefert Auflösung von Singularitäten des Maximalortes von Dimension $k + 1$

⇒ schließlich ganzer Maximalort zulässig

Wann ist ein Objekt in niedrigerer Dimension aufgelöst?

Zielsetzung in jeder Dimension k :

Transformieren der ursprünglichen Varietät in eine Vereinigung
exzept. Hyperflächen mit normalen Schnitten

Zielsetzung in jeder Dimension k :

Transformieren der ursprünglichen Varietät in eine Vereinigung
exzept. Hyperflächen mit normalen Schnitten

In Dimension $k < d$:

Nach Erreichen des Hauptziels: weitere Zentrumssuche mittels rein
kombinatorischem Algorithmus.

Zielsetzung in jeder Dimension k :

Transformieren der ursprünglichen Varietät in eine Vereinigung
exzept. Hyperflächen mit normalen Schnitten

In Dimension $k < d$:

Nach Erreichen des Hauptziels: weitere Zentrumssuche mittels rein
kombinatorischem Algorithmus.

In Dimension $k = d$:

Vorzeitiges Abbrechen, sobald Unterschema mit Zentrum
übereinstimmt.

Große Zahl von Karten

- große zu speichernde Datenmenge

Große Zahl von Karten

- große zu speichernde Datenmenge
- mehrfache Behandlung derselben Berechnungen in verschiedenen Karten
- Verkleben des Endresultats

Große Zahl von Karten

- große zu speichernde Datenmenge
- mehrfache Behandlung derselben Berechnungen in verschiedenen Karten
- Verkleben des Endresultats

Bereits die Berechnung der einzelnen Bausteine aufwendig:

- Gröbner Basen verwendet in Aufblasung, strikter und schwacher Transformierter, Zentrumswahl

Große Zahl von Karten

- große zu speichernde Datenmenge
- mehrfache Behandlung derselben Berechnungen in verschiedenen Karten
- Verkleben des Endresultats

Bereits die Berechnung der einzelnen Bausteine aufwendig:

- Gröbner Basen verwendet in Aufblasung, strikter und schwacher Transformierter, Zentrumswahl
- Rekursion über die Dimension in Zentrumswahl

- Entfernen 'unnötiger' Karten bei Aufblasung
- Vernachlässigung von offensichtlich nicht beitragenden Komponenten bei Zentrumsandidaten in Zwischenschritten

- Entfernen 'unnötiger' Karten bei Aufblasung
- Vernachlässigung von offensichtlich nicht beitragenden Komponenten bei Zentrumskandidaten in Zwischenschritten
- Primärzerlegung des Zentrums

- Entfernen 'unnötiger' Karten bei Aufblasung
- Vernachlässigung von offensichtlich nicht beitragenden Komponenten bei Zentrumskandidaten in Zwischenschritten
- Primärzerlegung des Zentrums
- Vermeiden von offenen Überdeckungen in der Ordnungsberechnung (siehe später)

- Entfernen 'unnötiger' Karten bei Aufblasung
- Vernachlässigung von offensichtlich nicht beitragenden Komponenten bei Zentrumskandidaten in Zwischenschritten
- Primärzerlegung des Zentrums
- Vermeiden von offenen Überdeckungen in der Ordnungsberechnung (siehe später)
- Vermeiden von offenen Überdeckungen bei Dimensionsabstieg, wenn möglich; sonst frühest möglicher Übergang zu ganzer affiner Karte

- $J = \langle f_1, \dots, f_r \rangle \subseteq A = k[[x_1, \dots, x_n]]$

$$\widehat{\Delta}(J) := \langle f_1, \dots, f_r, \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\}_{i,j} \rangle.$$

Definition von $\widehat{\Delta}(J)$ unabhängig von **Wahl der Erzeuger** von J
und von **Wahl der regulären Parameter** von A

- $J = \langle f_1, \dots, f_r \rangle \subseteq A = k[[x_1, \dots, x_n]]$

$$\widehat{\Delta}(J) := \langle f_1, \dots, f_r, \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\}_{i,j} \rangle.$$

Definition von $\widehat{\Delta}(J)$ unabhängig von **Wahl der Erzeuger** von J und von **Wahl der regulären Parameter** von A

- W nicht-singulär, $J \subseteq \mathcal{O}_W$ Idealgarbe. Dann existiert Idealgarbe $\Delta(J) \subseteq \mathcal{O}_W$ mit $\Delta(J)\widehat{\mathcal{O}}_{W,w} = \widehat{\Delta}(J\widehat{\mathcal{O}}_{W,w})$ for all $w \in W$.

- W nicht-singulär, $J \subseteq \mathcal{O}_W$ Idealgarbe and $w \in W$. Die Ordnung in w bzgl. J ist:

$$v_J(w) = \sup\{m \mid J_w \subseteq \mathfrak{m}_{W,w}^m\}.$$

$v_J : W \rightarrow \mathbb{N}$ ist oberhalbstetig.

- induktiv: $\Delta^0(J) = J$ und $\Delta^r(J) = \Delta(\Delta^{r-1}(J))$
- $v_J(w) = b > 0$ genau dann wenn $v_{\Delta(J)}(w) = b - 1$.
- $v_J(w) \geq b > 0$ genau dann wenn $w \in V(\Delta^{b-1}(J))$.

- W nicht-singulär, $J \subseteq \mathcal{O}_W$ Idealgarbe and $w \in W$. Die Ordnung in w bzgl. J ist:

$$v_J(w) = \sup\{m \mid J_w \subseteq \mathfrak{m}_{W,w}^m\}.$$

$v_J : W \rightarrow \mathbb{N}$ ist oberhalbstetig.

- induktiv: $\Delta^0(J) = J$ und $\Delta^r(J) = \Delta(\Delta^{r-1}(J))$
- $v_J(w) = b > 0$ genau dann wenn $v_{\Delta(J)}(w) = b - 1$.
- $v_J(w) \geq b > 0$ genau dann wenn $w \in V(\Delta^{b-1}(J))$.
- **b -singulärer Ort von J** , i.e. Menge der Punkte der Ordnung $\geq b$:

$$\text{Sing}_b(J) := \{w \in W \mid v_J(w) \geq b\} = V(\Delta^{b-1}(J)).$$

- $W = V(g_1, \dots, g_r)$ glatt, $J = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq \mathcal{O}_W$ Ideal,
 $m := n - \dim(W)$
- Falls $m = 0$:

$$\Delta(J) = \langle f_1, \dots, f_r, \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\}_{i,j} \rangle.$$

- $W = V(g_1, \dots, g_r)$ glatt, $J = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq \mathcal{O}_W$ Ideal,
 $m := n - \dim(W)$

- Falls $m = 0$:

$$\Delta(J) = \langle f_1, \dots, f_r, \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\}_{i,j} \rangle.$$

- Sonst

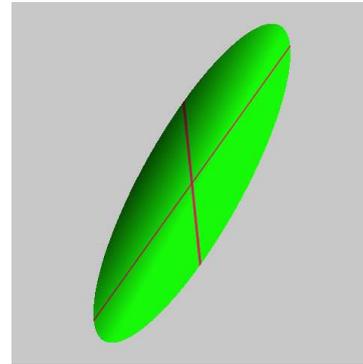
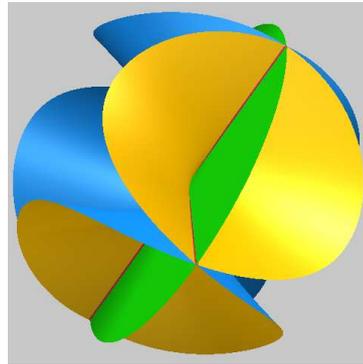
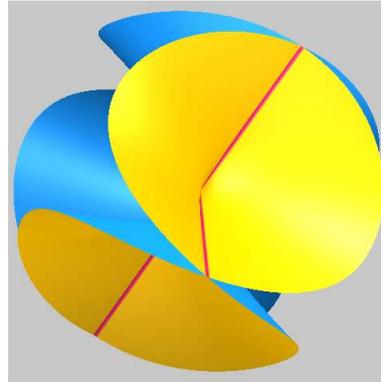
$$\Delta(J, M) := (J + \langle \{ \det(M) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{\substack{k \in r(M) \\ l \in c(M)}} \frac{\partial g_l}{\partial x_j} A_{lk}(M) \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \}_{i \leq j \leq s, j \notin r(M)} \rangle) : \det(M)^\infty.$$

wobei Matrix $A(M) = (A_{ij}(M))$ gegeben ist durch
 $A(M) \cdot M = \det(M) \cdot E_m.$

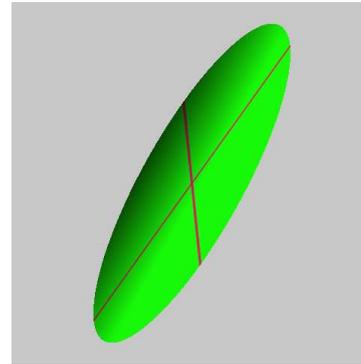
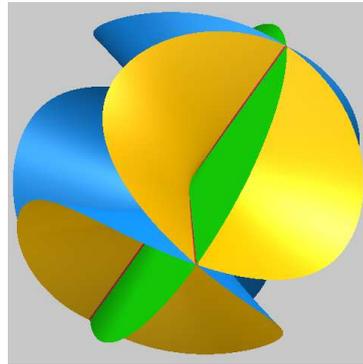
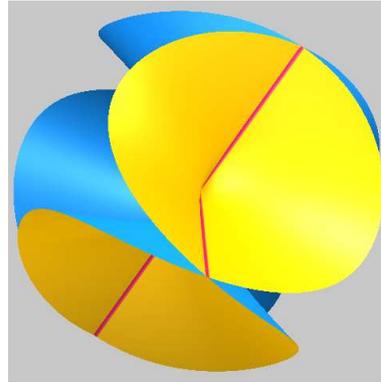
-

$$\Delta(J) = \bigcap_{M \in L} \Delta(J, M).$$

Auflösung von $X = V(z^2 - x^2y^2) \subset \mathbb{C}^3$



Auflösung von $X = V(z^2 - x^2y^2) \subset \mathbb{C}^3$



- singulärer Ort (rot) $Sing(X) = V(z, x^2y, xy^2)$.
- Hyperfläche max. Kontaktes Z (grün)
- Hilfsobjekt $C = V(x^2y^2) \subset Z = K^2$

$$X = V(z^2 - x^2y^2) \subseteq \mathbb{C}^3 = W$$

- Maximalort der Invariante in (W -)Dimension 3
 - Berechnung der maximalen Ordnung:
 $\Delta(z^2 - x^2y^2) = \langle z, xy^2, x^2y \rangle$
 $\Delta^2(z^2 - x^2y^2) = \langle 1 \rangle$
maximale Ordnung ist 2; 2-singulärer Ort: $\text{Sing}_2(J) = V(z, xy)$.
 - Berechnung von $n_x(E)$ unnötig: $E = \emptyset$

$$X = V(z^2 - x^2y^2) \subseteq \mathbb{C}^3 = W$$

- Maximalort der Invariante in (W -)Dimension 3
 - Berechnung der maximalen Ordnung:
 $\Delta(z^2 - x^2y^2) = \langle z, xy^2, x^2y \rangle$
 $\Delta^2(z^2 - x^2y^2) = \langle 1 \rangle$
maximale Ordnung ist 2; 2-singulärer Ort: $\text{Sing}_2(J) = V(z, xy)$.
 - Berechnung von $n_x(E)$ unnötig: $E = \emptyset$
- erster Dimensionsabstieg
 - Wahl der **Hyperfläche max. Kontaktes**:
Wählen $Z_0 = V(z)$, wobei offensichtlich gilt $\langle z \rangle \subseteq \Delta(z^2 - x^2y^2)$.
 - Erstes Hilfsobjekt:
 $\text{Coeff}_{Z_0}(z^2 - x^2y^2) = \langle x^2y^2, (xy^2)^2, (x^2y)^2 \rangle = \langle x^2y^2 \rangle$
 - **neue Situation**: $W = \mathbb{C}^2$, $X_{\text{new}} = V(x^2y^2)$, $E = \emptyset$

$$X = V(z^2 - x^2y^2) \subseteq \mathbb{C}^3 = W \text{ Forts.}$$

- Maximalort der Invariante in Dimension 2:
 - Ort maximaler Ordnung:
 $\Delta(x^2y^2) = \langle x^2y, xy^2 \rangle$ $\Delta^2(x^2y^2) = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$
 $\Delta^3(x^2y^2) = \langle x, y \rangle$ $\Delta^4(x^2y^2) = \langle 1 \rangle$
4-singulärer Ort: $\text{Sing}_4 = V(x, y)$.
 - Berechnung von $n_X(E)$ unnötig, da $E = \emptyset$

$$X = V(z^2 - x^2y^2) \subseteq \mathbb{C}^3 = W \text{ Forts.}$$

- Maximalort der Invariante in Dimension 2:
 - Ort maximaler Ordnung:
$$\Delta(x^2y^2) = \langle x^2y, xy^2 \rangle \quad \Delta^2(x^2y^2) = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$$
$$\Delta^3(x^2y^2) = \langle x, y \rangle \quad \Delta^4(x^2y^2) = \langle 1 \rangle$$
4-singulärer Ort: $\text{Sing}_4 = V(x, y)$.
 - Berechnung von $n_X(E)$ unnötig, da $E = \emptyset$
- zweiter Dimensionsabstieg
 - Wahl der **Hyperfläche maximalen Kontaktes**:
Wählen $Z_1 = V(x)$, wobei $\langle x \rangle \subseteq \Delta^3(x^2y^2)$.
 - Hilfsobjekt:
$$\text{Coeff}_{Z_1}(x^2y^2) = \langle (y^2)^{\frac{4!}{4-2}}, y^{\frac{4!}{4-3}} \rangle$$
$$\text{Coeff}_{Z_1}(x^2y^2) = \langle y^{24} \rangle$$
 - $W = \mathbb{C}, X_{\text{new}} = V(y^{24}), E = \emptyset$

- Maximalwert der Invariante in Dimension 1
 - Maximal order: 24
 - $n_x(E)$ unnötig

- Maximalwert der Invariante in Dimension 1
 - Maximal order: 24
 - $n_x(E)$ unnötig

Invariantenwerte:

$$\text{inv}(w) = \begin{cases} (2, 0; 4, 0; 24, 0) & w = (0, 0, 0) \\ (2, 0; 2, 0; 0, 0) & w = (0, y, 0), y \neq 0 \end{cases}$$

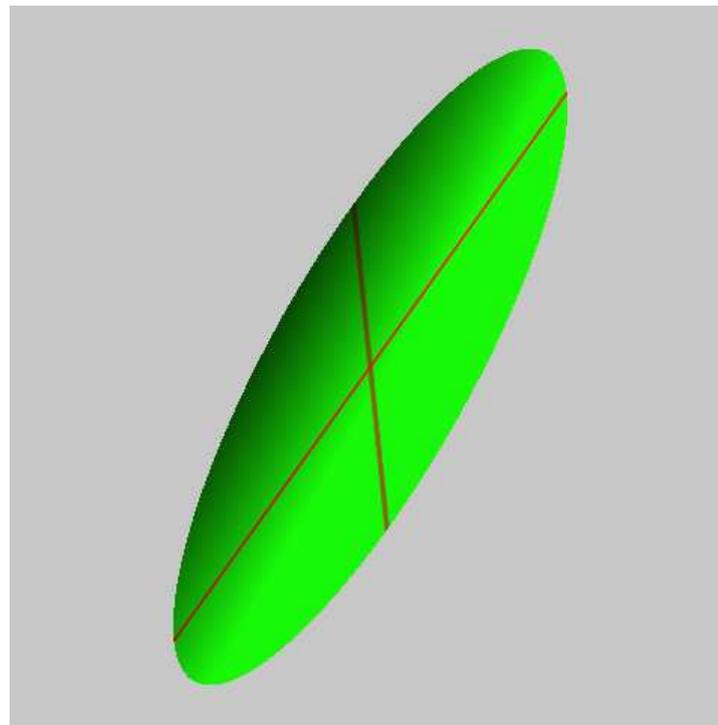
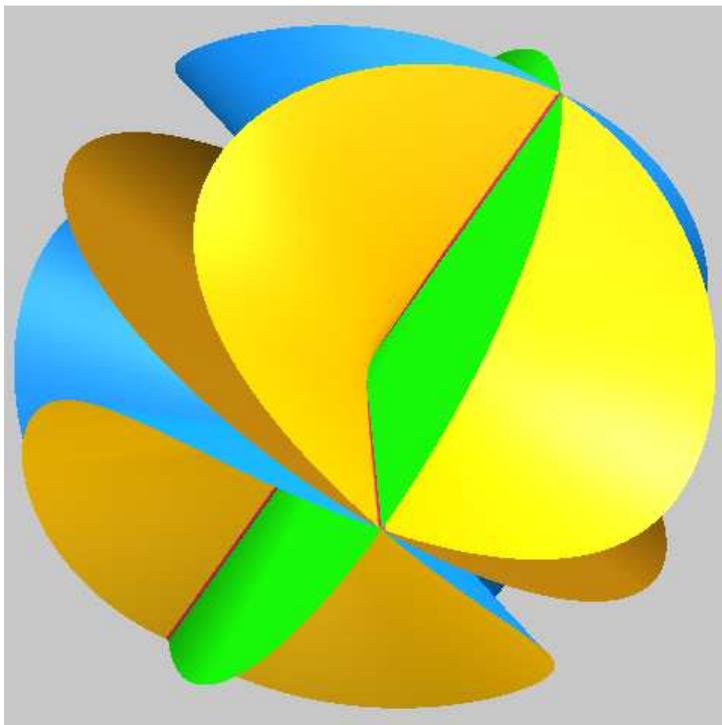
- Maximalwert der Invariante in Dimension 1
 - Maximal order: 24
 - $n_x(E)$ unnötig

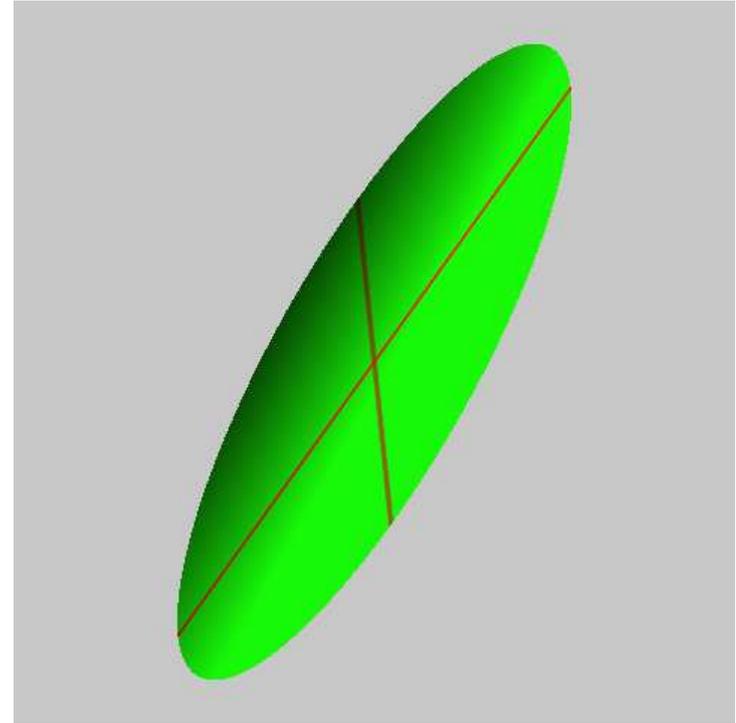
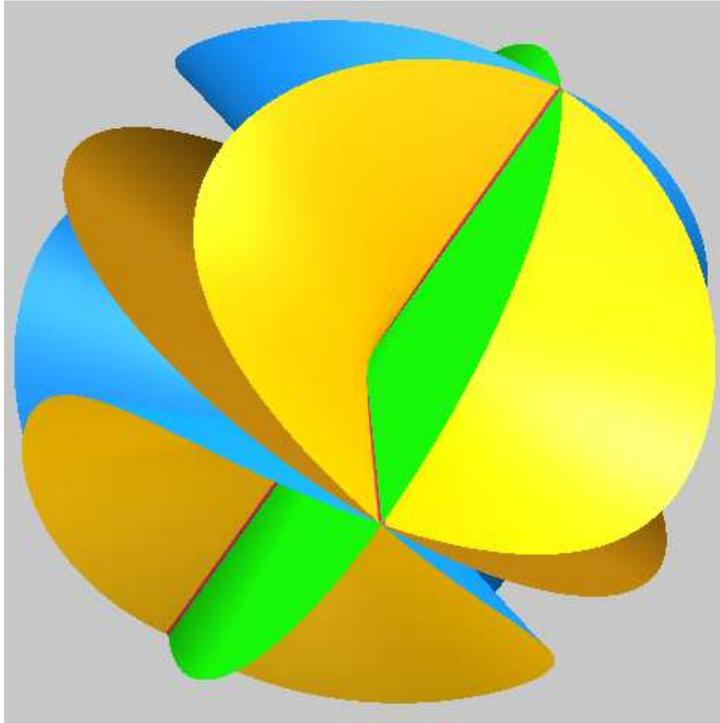
Invariantenwerte:

$$\text{inv}(w) = \begin{cases} (2, 0; 4, 0; 24, 0) & w = (0, 0, 0) \\ (2, 0; 2, 0; 0, 0) & w = (0, y, 0), y \neq 0 \end{cases}$$

- Daher nächstes Zentrum Punkt $(0, 0, 0)$ bzw. Ideal $\langle x, y, z \rangle$

Nach erster Aufblasung





- Exzept. Hyperfläche (braun)
- Hyperfläche max. Kontaktes Z (grün)
- Hilfsobjekt $C = V(y^2) \subset Z = K^2$

Interessante Karte: $x = uy, z = wy$

- die Transformierten:
 - $W = \mathbb{C}^3, X = V(w^2 - u^2y^2), E = \{V(y)\}$
 - $W = \mathbb{C}^2, X_{new} = V(u^2), E = \{V(y)\}$
 - $W = \mathbb{C}, X_{new} = \emptyset, E = \{V(y)\}$

Interessante Karte: $x = uy, z = wy$

- die Transformierten:
 - $W = \mathbb{C}^3, X = V(w^2 - u^2y^2), E = \{V(y)\}$
 - $W = \mathbb{C}^2, X_{new} = V(u^2), E = \{V(y)\}$
 - $W = \mathbb{C}, X_{new} = \emptyset, E = \{V(y)\}$
- $\text{Sing}_2(J) = \text{Sing}_2(w^2 - u^2y^2) \neq \emptyset$ in Dimension 3
- $\text{Sing}_4(u^2) = \emptyset$ in Dimension 2.

- die Transformierten:
 - $W = \mathbb{C}^3, X = V(w^2 - u^2y^2), E = \{V(y)\}$
 - $W = \mathbb{C}^2, X_{new} = V(u^2), E = \{V(y)\}$
 - $W = \mathbb{C}, X_{new} = \emptyset, E = \{V(y)\}$
- $\text{Sing}_2(J) = \text{Sing}_2(w^2 - u^2y^2) \neq \emptyset$ in Dimension 3
- $\text{Sing}_4(u^2) = \emptyset$ in Dimension 2.
- Maximalort in Dimension 3 unverändert, Ordnung in Dimension 2 gefallen.

- die Transformierten:
 - $W = \mathbb{C}^3, X = V(w^2 - u^2y^2), E = \{V(y)\}$
 - $W = \mathbb{C}^2, X_{new} = V(u^2), E = \{V(y)\}$
 - $W = \mathbb{C}, X_{new} = \emptyset, E = \{V(y)\}$
- $\text{Sing}_2(J) = \text{Sing}_2(w^2 - u^2y^2) \neq \emptyset$ in Dimension 3
- $\text{Sing}_4(u^2) = \emptyset$ in Dimension 2.
- Maximalort in Dimension 3 unverändert, Ordnung in Dimension 2 gefallen.
Nach recht technischer Berechnung wie oben:

$$\text{inv}(w) = \begin{cases} (2, 0; 2, 1; 2, 0) & w = (0, 0, 0) \\ (2, 0; 2, 0; 0, 0) & w = (0, y, 0), y \neq 0 \end{cases}$$

und damit neues **Zentrum** $(0, 0, 0)$.

Zwei interessante Karten

● Karte $u = yr, w = yt$

Transformierte:

- $\mathbb{C}^3, V(t^2 - r^2y^2), \{\emptyset, V(y)\}$ in Dimension 3
- $\mathbb{C}^2, V(r^2), \{\emptyset, V(y)\}$ in Dimension 2

Zwei interessante Karten

● Karte $u = yr, w = yt$

Transformierte:

- $\mathbb{C}^3, V(t^2 - r^2y^2), \{\emptyset, V(y)\}$ in Dimension 3
- $\mathbb{C}^2, V(r^2), \{\emptyset, V(y)\}$ in Dimension 2
- $\text{Sing}_2(t^2 - r^2y^2) \neq \emptyset$ and $\text{Sing}_2(r^2) \neq \emptyset,$

Zwei interessante Karten

● Karte $u = yr, w = yt$

Transformierte:

- $\mathbb{C}^3, V(t^2 - r^2y^2), \{\emptyset, V(y)\}$ in Dimension 3
- $\mathbb{C}^2, V(r^2), \{\emptyset, V(y)\}$ in Dimension 2
- $\text{Sing}_2(t^2 - r^2y^2) \neq \emptyset$ and $\text{Sing}_2(r^2) \neq \emptyset,$
- Neuberechnung für Dimension 1
 $\mathbb{C}^1, V(0), \{V(y)\}$ bereits aufgelöst

Zwei interessante Karten

● Karte $u = yr, w = yt$

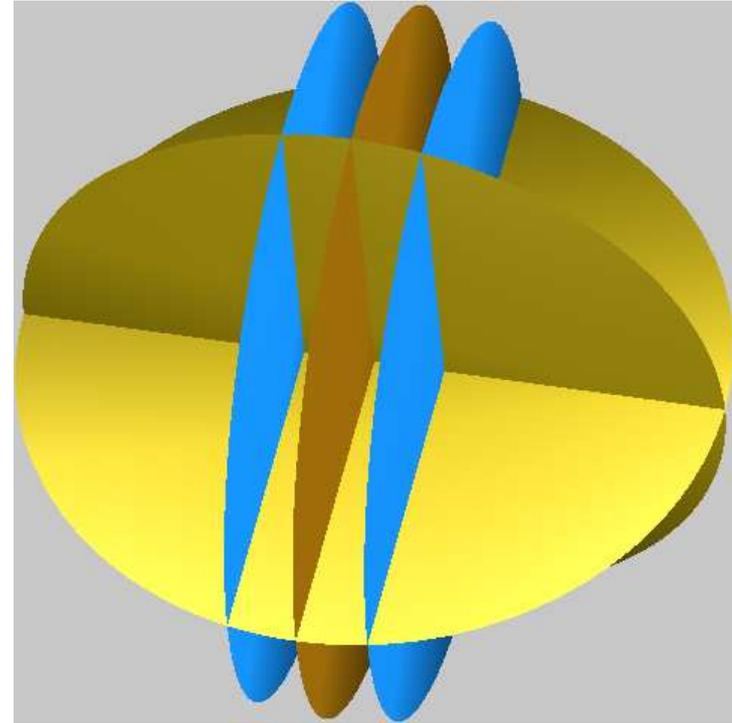
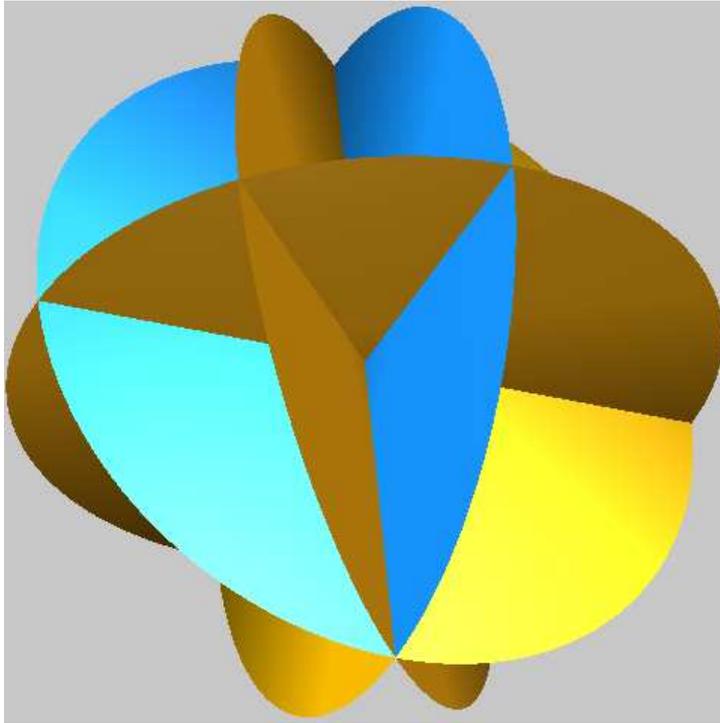
Transformierte:

- $\mathbb{C}^3, V(t^2 - r^2y^2), \{\emptyset, V(y)\}$ in Dimension 3
- $\mathbb{C}^2, V(r^2), \{\emptyset, V(y)\}$ in Dimension 2
- $\text{Sing}_2(t^2 - r^2y^2) \neq \emptyset$ and $\text{Sing}_2(r^2) \neq \emptyset,$
- Neuberechnung für Dimension 1
 $\mathbb{C}^1, V(0), \{V(y)\}$ bereits aufgelöst
- Zentrum: $V(t, r) = \text{Maximalort in Dimension 2.}$

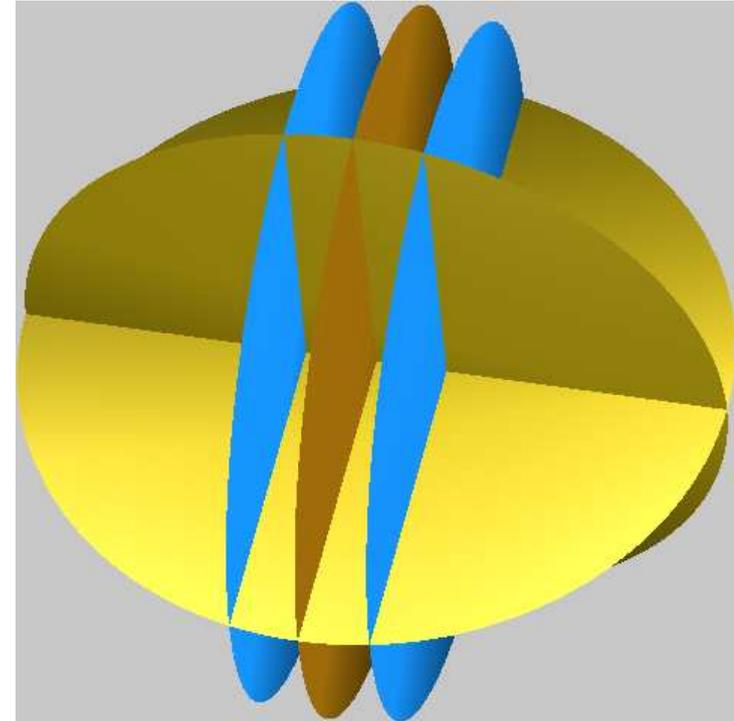
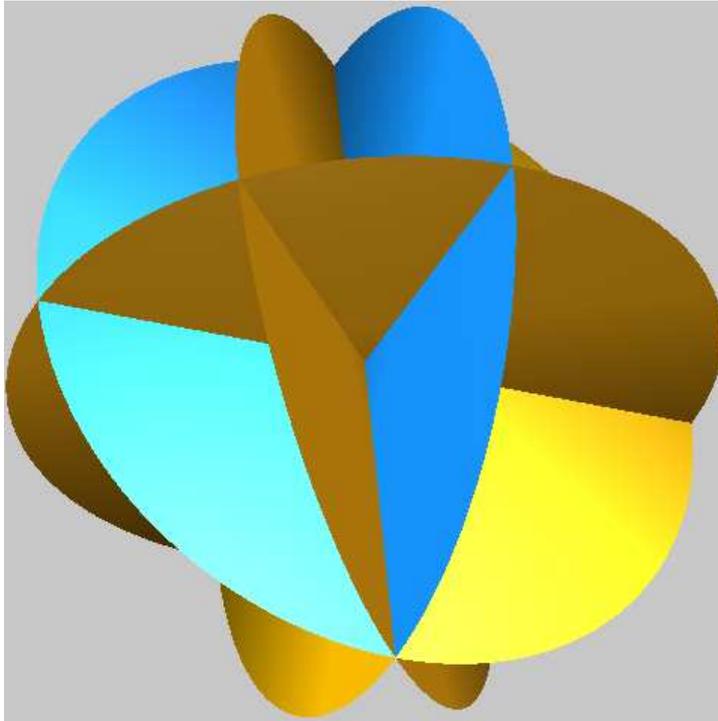
- Transformierte
 - $\mathbb{C}^3, V(t^2 - u^2s^2), \{V(s), V(u)\}$
 - $\mathbb{C}^2, \emptyset, 2, \{V(s), V(u)\}$
- **Hilfsobjekt in Dimension 2** leere Menge; **totale Transformierte** ist Produkt exzept. Hyperflächen
⇒ **monomialer (=kombinatorischer) Fall.**

- Transformierte
 - $\mathbb{C}^3, V(t^2 - u^2s^2), \{V(s), V(u)\}$
 - $\mathbb{C}^2, \emptyset, 2, \{V(s), V(u)\}$
- **Hilfsobjekt in Dimension 2** leere Menge; **totale Transformierte** ist Produkt exzept. Hyperflächen
⇒ **monomialer (=kombinatorischer) Fall.**
- **Zentrum:** $V(u, t)$ mittels kombinatorischem Algorithmus

Auflösung von $X = V(z^2 - x^2y^2) \subset \mathbb{C}^3$



Auflösung von $X = V(z^2 - x^2y^2) \subset \mathbb{C}^3$



- strikte Transformierte (blau/gelb) Vereinigung glatter Flächen
- exzept. Hyperflächen (brown)
- Zentrum (red)

Schwierigkeiten bei der Berechnung von Invarianten aus einer Auflösung

- Identifikation von Untervarietäten in verschiedenen Karten
- exzept. Divisoren können irreduzibel über \mathbb{Q} , aber reduzibel über \mathbb{C} sein

Schwierigkeiten bei der Berechnung von Invarianten aus einer Auflösung

- Identifikation von Untervarietäten in verschiedenen Karten
- exzept. Divisoren können irreduzibel über \mathbb{Q} , aber reduzibel über \mathbb{C} sein

Daher:

- (allg.) Identifikationsproblem zwischen Karten (Verklebung)
- Bestimmung der Körpererweiterung für ein Aufspalten
- Identifikationsproblem der \mathbb{C} -Komponenten

Theorem: Gao/Ruppert $f \in \mathbb{Q}[x, y]$ irreduzibel vom Bigrad (m, n) .

$$G = \{g \in \mathbb{Q}[x, y] \mid (m-1, n) \geq \deg(g), \exists h \in \mathbb{Q}[x, y], \frac{\partial(g/f)}{\partial y} = \frac{\partial(h/f)}{\partial x}\}.$$

Der Vektorraum G hat folgende Eigenschaften:

Theorem: Gao/Ruppert $f \in \mathbb{Q}[x, y]$ irreduzibel vom Bigrad (m, n) .

$$G = \{g \in \mathbb{Q}[x, y] \mid (m-1, n) \geq \deg(g), \exists h \in \mathbb{Q}[x, y], \frac{\partial(g/f)}{\partial y} = \frac{\partial(h/f)}{\partial x}\}.$$

Der Vektorraum G hat folgende Eigenschaften:

- f irreduzibel in $\mathbb{C}[x, y] \iff \dim_{\mathbb{Q}}(G) = 1$.

Theorem: Gao/Ruppert $f \in \mathbb{Q}[x, y]$ irreduzibel vom Bigrad (m, n) .

$$G = \{g \in \mathbb{Q}[x, y] \mid (m-1, n) \geq \deg(g), \exists h \in \mathbb{Q}[x, y], \frac{\partial(g/f)}{\partial y} = \frac{\partial(h/f)}{\partial x}\}.$$

Der Vektorraum G hat folgende Eigenschaften:

- f irreduzibel in $\mathbb{C}[x, y] \iff \dim_{\mathbb{Q}}(G) = 1$.
- $gG \subset \frac{\partial f}{\partial x}G \pmod{f}$ für alle $g \in G$.

Theorem: Gao/Ruppert $f \in \mathbb{Q}[x, y]$ irreduzibel vom Bigrad (m, n) .

$$G = \{g \in \mathbb{Q}[x, y] \mid (m-1, n) \geq \deg(g), \exists h \in \mathbb{Q}[x, y], \frac{\partial(g/f)}{\partial y} = \frac{\partial(h/f)}{\partial x}\}.$$

Der Vektorraum G hat folgende Eigenschaften:

- f irreduzibel in $\mathbb{C}[x, y] \iff \dim_{\mathbb{Q}}(G) = 1$.
- $gG \subset \frac{\partial f}{\partial x}G \pmod{f}$ für alle $g \in G$.
- Sei $g_1, \dots, g_a \in G$ eine Basis and $g \in G \setminus \mathbb{Q} \frac{\partial f}{\partial x}$,

$$gg_i = \sum a_{ij} g_j \frac{\partial f}{\partial x} \pmod{f}.$$

Sei $\chi(t) = \det(tE - (a_{ij}))$ das char. Polynom.

Dann ist χ irreduzibel in $\mathbb{Q}[t]$.

Theorem: Gao/Ruppert $f \in \mathbb{Q}[x, y]$ irreduzibel vom Bigrad (m, n) .

$$G = \{g \in \mathbb{Q}[x, y] \mid (m-1, n) \geq \deg(g), \exists h \in \mathbb{Q}[x, y], \frac{\partial(g/f)}{\partial y} = \frac{\partial(h/f)}{\partial x}\}.$$

Der Vektorraum G hat folgende Eigenschaften:

- f irreduzibel in $\mathbb{C}[x, y] \iff \dim_{\mathbb{Q}}(G) = 1$.
- $gG \subset \frac{\partial f}{\partial x}G \pmod{f}$ für alle $g \in G$.
- Sei $g_1, \dots, g_a \in G$ eine Basis and $g \in G \setminus \mathbb{Q} \frac{\partial f}{\partial x}$,

$$gg_i = \sum a_{ij} g_j \frac{\partial f}{\partial x} \pmod{f}.$$

Sei $\chi(t) = \det(tE - (a_{ij}))$ das char. Polynom.

Dann ist χ irreduzibel in $\mathbb{Q}[t]$.

- $f = \prod_{c \in \mathbb{C}, \chi(c)=0} \gcd(f, g - c \frac{\partial f}{\partial x})$ ist die Zerlegung von f in irreduzible Faktoren in $\mathbb{C}[x, y]$.

Zerlegung über \mathbb{C} : Beispiel

- $f = x^2 + y^2$

Zerlegung über \mathbb{C} : Beispiel

- $f = x^2 + y^2$
- $G = \langle x, y \rangle_{\mathbb{Q}}$
-

$$(a_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Zerlegung über \mathbb{C} : Beispiel

- $f = x^2 + y^2$
- $G = \langle x, y \rangle_{\mathbb{Q}}$



$$(a_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\chi(t) = t^2 + 1/4$

Zerlegung über \mathbb{C} : Beispiel

- $f = x^2 + y^2$
- $G = \langle x, y \rangle_{\mathbb{Q}}$



$$(a_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\chi(t) = t^2 + 1/4$

- $\gcd(x^2 + y^2, y - \frac{i}{2}2x) \gcd(x^2 + y^2, y + \frac{i}{2}2x) = x^2 + y^2$

Zerlegung über \mathbb{C} : Beispiel

- $f = x^2 + y^2$
- $G = \langle x, y \rangle_{\mathbb{Q}}$



$$(a_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\chi(t) = t^2 + 1/4$

- $\gcd(x^2 + y^2, y - \frac{i}{2}2x) \gcd(x^2 + y^2, y + \frac{i}{2}2x) = x^2 + y^2$

- $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ irreduzibel, $a \in K^n$ glatter Punkt von $V(f) \subset \bar{K}^n$
 $\implies f$ absolut irreduzibel.

- $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ irreduzibel, $a \in K^n$ glatter Punkt von $V(f) \subset \bar{K}^n$
 $\implies f$ absolut irreduzibel.
- $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ irreduzibel, $\alpha \in \bar{K}$, $a \in K(\alpha)^n$ ein glatter Punkt von $V(f) \subset \bar{K}^n$
 \implies ein absolut irred. Faktor von f ist definiert über $K(\alpha)$.

- $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ irreduzibel, $a \in K^n$ glatter Punkt von $V(f) \subset \bar{K}^n$
 $\implies f$ absolut irreduzibel.
- $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ irreduzibel, $\alpha \in \bar{K}$, $a \in K(\alpha)^n$ ein glatter Punkt von $V(f) \subset \bar{K}^n$
 \implies ein absolut irred. Faktor von f ist definiert über $K(\alpha)$.
- $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ irreduzibel, $1 \leq \deg_{x_n}(f)$
 $f(a, x_n)$ quadratfrei für ein $a \in K^{n-1}$, $g(x_n)$ irred. Faktor von $f(a, x_n)$
Sei $\alpha \in \bar{K}$, $g(\alpha) = 0$
 $\implies (a, \alpha) \in K(\alpha)^n$ glatter Punkt von $V(f) \subset \bar{K}^n$.
 \implies ein abs. irred. Faktor von f definiert über $K(\alpha)$.

- $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ irreduzibel, $a \in K^n$ glatter Punkt von $V(f) \subset \bar{K}^n$
 $\implies f$ absolut irreduzibel.
- $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ irreduzibel, $\alpha \in \bar{K}$, $a \in K(\alpha)^n$ ein glatter Punkt von $V(f) \subset \bar{K}^n$
 \implies ein absolut irred. Faktor von f ist definiert über $K(\alpha)$.
- $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ irreduzibel, $1 \leq \deg_{x_n}(f)$
 $f(a, x_n)$ quadratfrei für ein $a \in K^{n-1}$, $g(x_n)$ irred. Faktor von $f(a, x_n)$
Sei $\alpha \in \bar{K}$, $g(\alpha) = 0$
 $\implies (a, \alpha) \in K(\alpha)^n$ glatter Punkt von $V(f) \subset \bar{K}^n$.
 \implies ein abs. irred. Faktor von f definiert über $K(\alpha)$.
- Körpererweiterung $K \subset K(\alpha)$ nicht notwendig minimal bzgl. des abs. irred. Faktors (Minimierung durch Rothstein-Trager Algorithmus möglich)

Definition der Denef-Loeser ζ - Funktion $Z_{top}^{(d)}(f, s)$:

$f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], \pi : X \longrightarrow \mathbb{C}^n$ eingebettete Auflösung von $V(f)$.

$E_i, i \in I$ irred. Komponenten des Divisors $\pi^{-1}(f^{-1}(0))$.

Für jede Teilmenge $J \subset I$ setze

$$E_J := \bigcap_{j \in J} E_j \text{ und } E_J^* := E_J \setminus \bigcup_{j \notin J} E_{J \cup \{j\}} .$$

Definition der Denef-Loeser ζ - Funktion $Z_{top}^{(d)}(f, s)$:

$f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], \pi : X \longrightarrow \mathbb{C}^n$ eingebettete Auflösung von $V(f)$.

$E_i, i \in I$ irred. Komponenten des Divisors $\pi^{-1}(f^{-1}(0))$.

Für jede Teilmenge $J \subset I$ setze

$$E_J := \bigcap_{j \in J} E_j \text{ und } E_J^* := E_J \setminus \bigcup_{j \notin J} E_{J \cup \{j\}} .$$

Für jedes $j \in I$ sei

- N_j Multiplizität von E_j im Divisor von $f \circ \pi$
- $\nu_j - 1$ die Multiplizität von E_j im Divisor von $\pi^*(\omega)$ (ω eine nicht-verschwindende holomorphe n -Form in \mathbb{C}^n)

Definition der **Denef-Loeser ζ - Funktion** $Z_{top}^{(d)}(f, s)$:

$f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], \pi : X \longrightarrow \mathbb{C}^n$ **eingebettete Auflösung** von $V(f)$.

$E_i, i \in I$ irred. Komponenten des Divisors $\pi^{-1}(f^{-1}(0))$.

Für jede Teilmenge $J \subset I$ setze

$$E_J := \bigcap_{j \in J} E_j \text{ und } E_J^* := E_J \setminus \bigcup_{j \notin J} E_{J \cup \{j\}} .$$

Für jedes $j \in I$ sei

- N_j **Multiplizität** von E_j im Divisor von $f \circ \pi$
- $\nu_j - 1$ die **Multiplizität** von E_j im Divisor von $\pi^*(\omega)$ (ω eine nicht-verschwindende holomorphe n -Form in \mathbb{C}^n)

Die **Denef-Loeser ζ - Funktion** von f ist

$$Z_{top}^{(d)}(f, s) := \sum_{J \subset I, j \in J: d|N_j} \chi(E_J^*) \prod_{j \in J} (\nu_j + N_j s)^{-1} .$$

Im Flächenfall ($n=3$) kann die Euler Charakteristik $\chi(E_J^*)$ von E_J^* bestimmt werden durch.

Im Flächenfall ($n=3$) kann die Euler Charakteristik $\chi(E_J^*)$ von E_J^* bestimmt werden durch.

- $\chi(E_J^*) = 0$ für jede Komponente der strikten Transformierten.

Im Flächenfall ($n=3$) kann die Euler Charakteristik $\chi(E_j^*)$ von E_j^* bestimmt werden durch.

- $\chi(E_j^*) = 0$ für jede Komponente der strikten Transformierten.
- $\chi(E_j) = 3$ falls E_j von der Aufblasung eines Punktes stammt.

Im Flächenfall ($n=3$) kann die Euler Charakteristik $\chi(E_j^*)$ von E_j^* bestimmt werden durch.

- $\chi(E_j^*) = 0$ für jede Komponente der strikten Transformierten.
- $\chi(E_j) = 3$ falls E_j von der Aufblasung eines Punktes stammt.
- $\chi(E_j) = 4 - 4g(C)$ falls E_j von der Aufblasung einer Kurve C stammt.

Im Flächenfall ($n=3$) kann die Euler Charakteristik $\chi(E_j^*)$ von E_j^* bestimmt werden durch.

- $\chi(E_j^*) = 0$ für jede Komponente der strikten Transformierten.
- $\chi(E_j) = 3$ falls E_j von der Aufblasung eines Punktes stammt.
- $\chi(E_j) = 4 - 4g(C)$ falls E_j von der Aufblasung einer Kurve C stammt.
- $\chi(E_j)$ ändert sich i.a. bei folgenden Aufblasungen!

Im Flächenfall ($n=3$) kann die Euler Charakteristik $\chi(E_J^*)$ von E_J^* bestimmt werden durch.

- $\chi(E_j^*) = 0$ für jede Komponente der strikten Transformierten.
- $\chi(E_j) = 3$ falls E_j von der Aufblasung eines Punktes stammt.
- $\chi(E_j) = 4 - 4g(C)$ falls E_j von der Aufblasung einer Kurve C stammt.
- $\chi(E_j)$ ändert sich i.a. bei folgenden Aufblasungen!
- Falls $J = \{i, j, k\}$ dann $\chi(E_J^*) = \#(E_i \cap E_j \cap E_k)$.

Im Flächenfall ($n=3$) kann die Euler Charakteristik $\chi(E_J^*)$ von E_J^* bestimmt werden durch.

- $\chi(E_J^*) = 0$ für jede Komponente der strikten Transformierten.
- $\chi(E_j) = 3$ falls E_j von der Aufblasung eines Punktes stammt.
- $\chi(E_j) = 4 - 4g(C)$ falls E_j von der Aufblasung einer Kurve C stammt.
- $\chi(E_j)$ ändert sich i.a. bei folgenden Aufblasungen!
- Falls $J = \{i, j, k\}$ dann $\chi(E_J^*) = \#(E_i \cap E_j \cap E_k)$.
- Falls $J = \{i, j\}$ dann
$$\chi(E_J^*) = \chi(E_i \cap E_j) - \sum_{k, k \neq i, j} \#(E_i \cap E_j \cap E_k).$$

Im Flächenfall ($n=3$) kann die Euler Charakteristik $\chi(E_J^*)$ von E_J^* bestimmt werden durch.

- $\chi(E_j^*) = 0$ für jede Komponente der strikten Transformierten.
- $\chi(E_j) = 3$ falls E_j von der Aufblasung eines Punktes stammt.
- $\chi(E_j) = 4 - 4g(C)$ falls E_j von der Aufblasung einer Kurve C stammt.
- $\chi(E_j)$ ändert sich i.a. bei folgenden Aufblasungen!
- Falls $J = \{i, j, k\}$ dann $\chi(E_J^*) = \#(E_i \cap E_j \cap E_k)$.
- Falls $J = \{i, j\}$ dann
$$\chi(E_J^*) = \chi(E_i \cap E_j) - \sum_{k, k \neq i, j} \#(E_i \cap E_j \cap E_k).$$
- $\chi(E_i \cap E_j) = 2 - 2g(E_i \cap E_j)$.

Im Flächenfall ($n=3$) kann die Euler Charakteristik $\chi(E_J^*)$ von E_J^* bestimmt werden durch.

- $\chi(E_j^*) = 0$ für jede Komponente der strikten Transformierten.
- $\chi(E_j) = 3$ falls E_j von der Aufblasung eines Punktes stammt.
- $\chi(E_j) = 4 - 4g(C)$ falls E_j von der Aufblasung einer Kurve C stammt.
- $\chi(E_j)$ ändert sich i.a. bei folgenden Aufblasungen!
- Falls $J = \{i, j, k\}$ dann $\chi(E_J^*) = \#(E_i \cap E_j \cap E_k)$.
- Falls $J = \{i, j\}$ dann
$$\chi(E_J^*) = \chi(E_i \cap E_j) - \sum_{k, k \neq i, j} \#(E_i \cap E_j \cap E_k).$$
- $\chi(E_i \cap E_j) = 2 - 2g(E_i \cap E_j)$.
- $\chi(E_i^*) = \chi(E_i) - \sum_{i \neq j} \chi(E_i \cap E_j) + \sum_{j, k \neq i} \#(E_i \cap E_j \cap E_k)$.



T. Wichmann, C. Lossen, G.-M. Greuel, H. Schönemann,
W. Pohl, G. Pfister, V. Levandovskyy, E. Westenberger,
A. Frühbis-Krüger, **Oscar**, K. Krüger



Kaiserslautern
Saarbrücken
Cottbus
Berlin
Mainz
Dortmund
Valladolid
La Laguna

T. Wichmann, C. Lossen, G.-M. Greuel, H. Schönemann,
W. Pohl, G. Pfister, V. Levandovskyy, E. Westenberger,
A. Frühbis-Krüger, **Oscar**, K. Krüger