Math. Vertiefung - Linearität in Algebra und Analysis
Übungsblatt 4

Abgabe: 12./13. November 2018 in den Übungsgruppen.

Aufgabe 1. Sei K ein unendlicher Körper, $H_1, \ldots, H_m$ endlich viele echte affine Unterräume des K^n. Zeige:

$$\bigcup_i H_i \neq K^n.$$

Aufgabe 2. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Setze

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k},\ f^0 = \mathrm{id}.$$

Sei $V_k = \mathrm{Bild}(f^k), K_k = \mathrm{Kern}(f^k)$.

(a) Zeige:

$$V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \ldots,$$

$$K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots,$$

(b) Zeige weiter: es gibt ein k mit

$$V_k = V_{k+1} = V_{k+2} = \ldots.$$

Dann gilt: $V = V_k \oplus K_k$, und f bildet jeden Summanden in sich ab.

Aufgabe 3. (Doppelverhältnis) Es seien $a, b, c, d \in K$ vier verschiedene Punkte, dann ist deren *Doppelverhältnis* gegeben durch

$$DV(a,b,c,d) = \frac{a-b}{a-d} : \frac{c-b}{c-d}.$$

(a) Zeige: ist $DV(a,b,c,d) = \lambda$, so ergeben sich als Doppelverhältnisse für jede mögliche Permutation der vier Punkte nur die Werte

$$\lambda,\ 1-\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ \frac{\lambda-1}{\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1},\ \frac{1}{1-\lambda}.$$

Identifiziere die projektive Gerade P^1K mit $\hat{K} := K \cup \{\infty\}$ vermöge der Vorschrift $[x : y] \mapsto \frac{y}{x}$, wobei $\frac{y}{0}$ als ∞ interpretiert wird.

(b) Zeige, dass dies tatsächlich eine Bijektion $P^1K \to \hat{K}$ definiert. Zeige außerdem, dass die projektiven Transformationen auf P^1K den gebrochen-linearen Transformationen

$$z \mapsto \frac{dz + c}{bz + a}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2; K)$$

auf $\hat{K}$ entsprechen (wobei Division durch 0 bzw. ∞ wiederum als ∞ bzw. 0 aufgefasst wird).

Es seien z, z_1, z_2, z_3 Punkte in $\hat{K}$, von denen die letzten drei verschieden sind. Betrachte das *projektive Doppelverhältnis*

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}.$$

Falls einer der Punkte auf ∞ fällt, ist das Doppelverhältnis hier wie folgt zu interpretieren:

$$DV(\infty, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}, \quad DV(z, \infty, z_2, z_3) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}$$

$$DV(z, z_1, \infty, z_3) = \frac{z - z_1}{z - z_3}, \quad DV(z, z_1, z_2, \infty) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

(c) Zeige: das Doppelverhältnis ist eine Invariante der projektiven Geometrie, d.h. für jede projektive Transformation T gilt:

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) = DV(Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3)$$

(*Hinweis:* Zeige, dass jede gebrochen-lineare Transformation mit drei Fixpunkten bereits die Identität sein muss und fasse beide Seiten der Gleichung als Funktionen in z auf.)