Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 3
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Man betrachte folgende Mengen G mit der jeweils angegebenen Verknüpfung $\circ$. Entscheide jeweils mit kurzer Begründung, ob es sich um eine Gruppe handelt.

(a) $G = \mathbb{R}$ mit der Verknüpfung $x \circ y = 3x + 4y$.

(b) $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der Verknp̈fung $x \circ y = 2016 \cdot x \cdot y$.

(c) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$ mit der Verknüpfung $x \circ y = \frac{x+y}{1+xy}$.

(d) $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ mit der Verknüpfung $(x, a) \circ (y, b) = (x + ay, ab)$.
(Hier ist $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.)

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und betrachte die Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

(a) Zeige, dass für jede ganze Zahl m,

$$m \cdot (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) := \{\overline{m \cdot x} \mid x \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

eine Untergruppe von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist.

(b) Sei $m \geq 1$ ein Teiler von n. Zeige, dass die Quotientengruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(m(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$ genau m Elemente besitzt. Bleibt dies richtig, falls m kein Teiler von n ist?

Aufgabe 3. (4 Punkte (+2 Bonuspunkte))
Im folgenden bezeichne $\mathbb{Q}^\times := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ die rationalen Zahlen ohne die Null, und $\mathbb{Q}_{>0} := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ die positiven rationalen Zahlen.

(a) Zeige, dass $(\mathbb{Q}^\times, \cdot)$ eine Gruppe ist.

(b) Zeige, dass $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}^\times, \cdot)$ ist.

(c) Wie viele Elemente hat die Quotientengruppe $\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}_{>0}$?

(d) *Dies ist eine Zusatzaufgabe, deren Lösung 2 Bonuspunkte einbringt.*
Betrachte die abelsche Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$. Gibt es eine Untergruppe H von $(\mathbb{Q}, +)$, sodass die Quotientengruppe $\mathbb{Q}/H$ nicht-trivial und endlich ist, d.h. $H \neq \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}/H$ besitzt nur endlich viele Elemente?

Bitte wenden.

Abgabe ist am **Freitag 11. November 2016**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Bemerkung: Bei der folgenden Aufgabe sollen Sie Ihre Anschauung trainieren – Sie dürfen deshalb auch anschaulich und zum Beispiel mit Bildern oder Skizzen argumentieren.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Rotationen der Ebene bilden eine Gruppe*
Betrachte das halboffene Intervall $[0, 2\pi) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\pi\}$. Für eine reelle Zahl $\phi \in [0, 2\pi)$, betrachte man die Rotation der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ um den Phasenwinkel ϕ, d.h. die Abbildung

$$r_\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cdot \cos(\phi) - y \cdot \sin(\phi) \\ x \cdot \sin(\phi) + y \cdot \cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die Menge aller Rotationen

$$G := \{r_\phi \mid \phi \in [0, 2\pi)\}$$

zusammen mit der Verknüpfung von Abbildungen eine Gruppe $(G, \circ)$ bildet. Ist diese Gruppe abelsch?

(b) Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Zeige oder widerlege, dass $(G, \circ)$ eine Untergruppe mit n Elementen besitzt.

(c) Wie viele Untergruppen der Ordnung zwei hat $(G, \circ)$?

Allgemeine Bemerkungen:

- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Sätze und Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.

- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de).

- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/ag/la2016/LA1.htmpl`

- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden.

  Die Teilnehmer der Tutorien 5, 6, 7 und 8 werden gebeten, die Übungszettel direkt bei Ihrem Tutor während des Freitags Tutoriums von 8:00-10:00 Uhr abzugeben.

- Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.

- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.

- Es wird ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Montags 15:00–18:00 sowie Donnerstags 14:00–17:00 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.

- Mehr Details finden Sie auf der oben genannten Homepage der Vorlesung.