Analysis 2

07.05.2018
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: 17.05.2018 in der Vorlesung

Übungsblatt 5

Aufgabe 1: **5+5 = 10 Punkte**

Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma F \, \mathrm{d}\vec{x}$$

für

(i) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t))$ und $F(x, y) := (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ für $(x, y) \neq (0, 0)$,

(ii) die Verbindungsstrecke γ von $(0, 1)$ nach $(1, 2)$ und $F(x, y) := (\exp(x), \exp(y)\sin(x))$.

Aufgabe 2: **5+5 = 10 Punkte**

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := e^{-|x|^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei wie üblich für $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ $|x| := \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ die euklidische Norm von x bezeichne.

(a) Zeigen Sie direkt anhand der Definition, dass f in $0 \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel, dass f total differenzierbar ist und bestimmen Sie in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die Jacobimatrix $J_f(x_0)$.

Aufgabe 3: **10 Punkte**

Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Abbildung $f\colon M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ gegeben durch $f(A) = A^m$ für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass f total differenzierbar ist und bestimmen Sie in jedem $A_0 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ die (totale) Ableitung $Df(A_0)$.

Aufgabe 4: **10 Punkte**

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine total differenzierbare Funktion, für die $Df(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gelte. Zeigen Sie, dass f konstant ist.
Hinweis: Gehen Sie hierzu wie folgt vor: Verbinden Sie beliebige $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ durch eine Strecke und zeigen Sie, dass für geeignete Elemente x_i, y_i der Verbindungsstrecke die Differenz $|f(x_i) - f(y_i)|$ geeignet klein wird. Nutzen Sie sodann ein Kompaktheitsargument, um die Aussage zu schlussfolgern.
