Prof. M. Rapoport WS 04/05

I. Vollaard

Seminar algebraische Zahlentheorie

Wir werden uns in diesem Seminar im Wesentlichen nach den Artikeln von Serre ([S1]) und Atiyah/Wall ([AW]) in [CF] richten. Trotzdem empfiehlt es sich für die Vorträge 3 bis 8, auch einmal die Darstellung in [S2] anzusehen.

Bei Fragen wendet Euch an: Inken Vollaard, Be 4 Zi 38, vollaard@math.uni-bonn.de

1. Vortrag: Proendliche Gruppen und diskrete Bewertungsringe (1 Sitzung)
Eine proendliche Gruppe ist der projektive Limes eines projektiven Systems endlicher Gruppen versehen mit einer Topologie. In diesem Vortrag sollen die wesentlichen Eigenschaften von proendlichen Gruppen erklärt werden, insbesondere die Charakterisierung als kompakte, total unzusammenhängende Gruppen ([G] Kap. 1). Außerdem wird der Begriff eines diskreten Bewertungsrings A eingeführt und gezeigt, dass die Vervollständigung des zugehörigen Quotientenkörpers gerade dem Quotientenkörper der Vervollständigung von A als abelsche Gruppe entspricht ([S2] Kap. I §1, Kap. II §1).

2. Vortrag: Erweiterungen vollständiger diskreter Bewertungsringe (2 Sitzungen)
Diskrete Bewertungsringe lassen sich charakterisieren als lokale Dedekindringe ([S2] Kap. I.§2). Mit Hilfe des Henselschen Lemmas können Erweiterungen vollständiger diskreter Bewertungsringe genau beschrieben werden ([N] Kap. II 4.6-4.8, Beispiele [S2] Kap. I §6). Mit Hilfe dieser Sätze lassen sich lokale Körper, d.h. diskret bewertete lokal kompakte Körper, vollständig beschreiben als endliche Erweiterungen von $\mathbb{F}_p((t))$ bzw. der p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ ([S2] Kap. II §4). Weiterhin soll für einen lokalen Körper die maximale unverzweigte Erweiterung K_{nr} definiert und ihre Galoisgruppe berechnet werden ([S2] Kap. III §5).

3. Vortrag: Gruppenkohomologie (2 Sitzungen)
In diesem Vortrag werden für eine Gruppe G die Kohomologiegruppen $\mathrm{H}^q(G, A)$ und Homologiegruppen $\mathrm{H}_q(G, S)$ eines $\mathbb{Z}[G]$-Moduls A definiert. Beispielsweise ist $\mathrm{H}^0(G, A) = A^G$ die Untergruppe der G-invarianten Elemente. Ein Gruppenhomomorphismus induziert einen Morphismus der Kohomologiegruppen, insbesondere erhält man dadurch die Restriktions- bzw. Inflationsabbildungen. Falls G endlich ist, lassen sich Kohomologie- und Homologiegruppen im Wesentlichen zu den sogenannten Tate-Kohomologiegruppen $\widehat{\mathrm{H}}^q(G, A)$ zusammenfassen ([AW] Kap. 1-6).

4. Vortrag: Cup-Produkt und Tate's Theorem (2 Sitzungen)
Sei G eine endliche Gruppe. Ähnlich wie bei der de Rham-Kohomologie lässt sich auch für die Tate-Kohomologiegruppen ein Cup-Produkt definieren. Höhepunkt dieses Vortrags ist der Beweis von Tate's Theorem, das unter gewissen Voraussetzungen einen Isomorphismus zwischen $\widehat{\mathrm{H}}^0(G, A) = A^G/N(A)$ und $\mathrm{H}_1(G, \mathbb{Z}) = G/[G, G]$ mit Hilfe des Cup-Produkts liefert. Die Reziprozitätsabbildung ist später ein Spezialfall dieses Isomorphismus ([AW] Kap. 7-10).

5. Vortrag: Galoiskohomlogie (1 Sitzung)
Für eine Galoiserweiterung L/K mit Galoisgruppe G und einen G-Modul A definiert man die Galoiskohomologie $\mathrm{H}^q(L/K, A)$ als induktiven Limes aus den Kohomologiegruppen der endlichen galoisschen Teilerweiterungen von L/K. Die Ergebnisse der letzten Vorträge lassen sich auf die Galoiskohomologie übertragen. Für den Spezialfall einer endlichen zyklischen Erweiterung L/K,

d.h. mit zyklischer Galoisgruppe, liefert die Trivialität von $\mathrm{H}^1(L/K, L^\times)$ gerade Hilbert's Satz 90 ([G] Kap. 2). Am Ende soll kurz der Zusammenhang zu den zentraleinfachen Algebren erklärt werden ([S2] Kap. X §5, [L] §30 Satz 2).

6. Vortrag: Die Brauergruppe eines lokalen Körpers (2 Sitzungen)
Für einen lokalen Körper K bezeichne K_s einen separablen Abschluss von K. Als Anwendung der Galoiskohomologie soll die Brauergruppe $\mathrm{Br}(K) = \mathrm{H}^2(K_s/K, K_s^\times)$ berechnet werden. Es wird gezeigt, dass $H^2(K_s/K, K_s^\times)$ nur von der maximalen unverzweigten Erweiterung K_{nr} abhängt und isomorph zu $\mathrm{H}^2(K_s/K, K_s^\times) = \mathrm{H}^2(K_{nr}/K, K_{nr}^\times) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist. ([S1] Kap. 1).

7. Vortrag: Die Reziprozitätsabbildung (1 Sitzung)
Für endliche abelsche Erweiterungen L/K, d.h. Galoiserweiterungen mit abelscher Galoisgruppe, erhält man durch das Cup-Produkt einen Isomorphismus von der Faktorgruppe $K^\times/\mathrm{N}_{L/K}(L^\times)$ mit $\mathrm{Gal}(L/K)$, also den ersten Hauptsatz der lokalen Klassenkörpertheorie. Diese sogenannte lokale Reziprozitätsabbildung wird in diesem Vortrag genauer charakterisiert und für den Fall einer unverzweigten Erweiterung explizit berechnet. ([S1] 2.1-2.6, 2.8).

8. Vortrag: Der Existenzsatz (2 Sitzungen)
Die maximale abelsche Erweiterung $\mathbb{Q}_p^{ab}$ von $\mathbb{Q}_p$ in $\overline{\mathbb{Q}}_p$wird von allen Einheitswurzeln in $\overline{\mathbb{Q}}_p$ erzeugt. Es gilt $\mathbb{Q}_p^{ab} = \mathbb{Q}_{p,nr}\mathbb{Q}_{p^\infty}$, wobei die $\mathbb{Q}_{p,nr}$ von allen Einheitswurzeln von Ordnung prim zu p und $\mathbb{Q}_{p^\infty}$ von allen p^n-ten Einheitswurzeln mit $n \in \mathbb{Z}$ erzeugt wird. Mit Hilfe der Lubin-Tate-Theorie lässt sich eine ähnliche Zerlegung für den Fall beliebiger lokaler Körper konstruieren und damit die Reziprozitätsabbildung explizit beschreiben. Mit dieser Beschreibung werden wir den Existenzsatz bzw. zweiten Hauptsatz der Klassenkörpertheorie beweisen, der eine Entsprechung zwischen den endliche abelsche Erweiterungen von K und den offenen Untergruppen von $K^\times$ von endlichem Index liefert ([S1] 2.7 und Kap.3, vgl. auch [LT]).

Literatur

[AW] M. Atiyah, C. Wall: *Cohomology of Groups*, in [CF]

[CF] J. Cassels, A. Fröhlich (eds.): *Algebraic Number Theory*, Academic Press (1967)

[G] K. Gruenberg: *Profinite Groups*, in [CF]

[L] F. Lorenz: *Einführung in die Algebra II*, Spektrum Akad. Verl., 2. Auflage (1997)

[LT] J. Lubin, J. Tate: *Formal complex multiplication in local fields*, Ann. of Math. **81** (1965) 380–387

[N] J. Neukirch: *Algebraische Zahlentheorie*, Springer Verlag (1992)

[S1] J.-P. Serre: *Local Class Field Theory*, in [CF]

[S2] J.-P. Serre: *Local Fields*, Springer Verlag (1979)