Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **WS 2004/05**

Seminar über Abelsche Varietäten

Termin: Fr, 10-12, SR B, Beginn: 22.10.2004

I. Grundlegende Eigenschaften abelscher Varietäten

Im ersten Teil des Seminars definieren wir den Begriff einer abelschen Varietät, und beweisen einige wichtige Eigenschaften, zum Beispiel Kommutativität, Rigidität und Projektivität. Zusätzlich zu den angegebenen Abschnitten in Mumfords Buch [M], lohnt es sich auch, einen Blick in den Artikel von Milne [Mi], §§1,2,5–8, zu werfen.

1. Einführung (1 Sitzung)

Definition des Begriffs einer abelschen Varietät, erste Eigenschaften: [M], §4. Dabei können die Ausführungen zu *Question 1-4* nach Belieben gekürzt oder weggelassen werden, ebenso wie der Appendix.

2. Das Seesaw-Prinzip und der Satz vom Würfel (2 Sitzungen)

Das Seesaw-Prinzip ([M], §5, Cor. 6 und die Verschärfung §10, Prop.) ist eine Konsequenz der Theorie von Kohomologie und Basiswechsel, die wir als bekannt voraussetzen. Den Satz vom Würfel beweisen wir direkt in der Form [M], §10, Theorem. Schließlich brauchen wir noch Cor. 1–4 in [M], §6.

3. Anwendungen des Satzes vom Würfel (1 Sitzung)

Definition von ϕ_L und $K(L)$ und *Application 1–3* in [M], §6. Zum Schnittprodukt von Divisoren sollte kurz etwas gesagt werden, siehe z. B. [Mi], Lemma 8.3 und die Bemerkungen davor. Die Definition einer Isogenie sollte etwas weniger knapp sein als bei Mumford, siehe z. B. [Mi], Prop. 8.1.

II. Die Theorie abelscher Varietäten über den komplexen Zahlen

Im zweiten Teil studieren wir abelsche Varietäten über $\mathbb{C}$. Es ist nicht schwer zu sehen, dass jede abelsche Varietät über den komplexen Zahlen (oder genauer: die zugehörige komplexe Mannigfaltigkeit) ein komplexer Torus $\mathbb{C}^n/\Lambda$, $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ ein Gitter, ist. Im Fall $n = 1$ findet man so die wohlbekannte Beschreibung elliptischer Kurven wieder. Das Studium von Geradenbündeln auf einer abelschen Varietät, das auch im dritten Teil des Seminars eine große Rolle spielt, läßt sich in diesem Fall sehr explizit in Termen des Gitters Λ durchführen. Man kann dann auch ein Kriterium dafür angeben, wann ein komplexer Torus eine abelsche Varietät, also wann er algebraisierbar ist ('fast alle' komplexen Tori sind nicht algebraisierbar!). Weitere Quellen neben [M], §§1–3, sind der Artikel [R] von Rosen und das Büchlein [SD] von Swinnerton-Dyer.

4. Komplexe Tori (2 Sitzungen)

[M], §1. Wir zeigen zunächst, daß jede kompakte komplexe Lie-Gruppe ein komplexer Torus ist, und studieren dann die Kohomologie eines komplexen Torus.

5. Geradenbündel auf einem komplexen Torus (2 Sitzungen)

[M], §2. Wir beschreiben nun die Geradenbündel auf einem komplexen Torus. Das wesentliche Ergebnis ist der Satz von Appell–Humbert. Zu dem zu Beginn von §2 zitierten Theorem sollte höchstens ganz kurz etwas gesagt werden.

6. Algebraisierbarkeit komplexer Tori (2 Sitzungen)

[M], §3. In diesem Vortrag studieren wir die Frage, wann ein komplexer Torus algebraisierbar ist. Das Theorem von Chow kann ohne Beweis zitiert werden. Das Beispiel elliptischer Kurven sollte allen bekannt sein und kann daher ausgelassen werden.

III. Die duale abelsche Varietät

Im dritten Teil werden wir uns der Konstruktion der dualen abelschen Varietät widmen, die ein wichtiger Bestandteil der Theorie der abelschen Varietäten ist. Beim Studium der elliptischen Kurven wird dieser Begriff nur indirekt sichtbar, da jede elliptische Kurve kanonisch isomorph zu ihrem Dual ist. Das wichtigste technische Hilfsmittel bei der Konstruktion der dualen abelschen Varietät ist die Bildung des Quotienten eines Schemas nach der Operation eines Gruppenschemas; dies ist natürlich ein Ergebnis von eigenständigem Interesse.

7. Quotienten von Schemata nach endlichen Gruppenschemata (1 Sitzung)

[M], §12, Theorem 1. Aus §11 sollte nur das Nötigste nachgetragen werden. Für den Beweis von Teil (B) des Theorems kann man sich gegebenenfalls auf den Fall, daß X eine Varietät und G eine endliche Gruppe von Automorphismen von X ist, beschränken (siehe [M], §7).

8. Isogenien, Pic^0 (1 Sitzung)

Zunächst brauchen wir [M], §7, Thm. 4 und die beiden Korollare dazu, vergleiche auch Cor. 1 in §12. Außerdem [M], §8 bis einschließlich Theorem 1. (Den Gebrauch der Leray-Spektralsequenz im Beweis von Thm. 1 kann man umgehen: statt (1) benutze [H] III Ex. 8.1, statt (2) benutze [H] III Prop. 8.1.)

9. Die duale abelsche Varietät (2 Sitzungen)

Definiere zuerst die Schemastruktur auf $K(L)$ ([M], Anfang von §13). Bevor wir mit der Konstruktion der dualen abelschen Varietät beginnen, müssen wir definieren, was wir darunter überhaupt verstehen: siehe die Bemerkungen nach Theorem 1 in [M], §8, und die Ausführungen nach Remark 9.3 in [Mi]. Bei der Konstruktion richten wir uns dann weiter nach [M], §13. Falls die Zeit es zuläßt, können noch einige der Korollare am Ende behandelt werden. Vom Korollar ganz am Schluß sollte zumindest die Aussage angegeben werden. Zum Abschluß konkretisieren wir noch die allgemeine Beschreibung der dualen abelschen Varietät im Fall $k = \mathbb{C}$, [M], §9.

Allgemeine Konventionen

- Wir arbeiten (wie Mumford [M], aber anders als Milne [Mi]) stets über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k.
- Alle auftretenden Schemata sind separiert und von endlichem Typ über k. Unter einer Varietät verstehen wir ein Schema, das zusätzlich irreduzibel ist.
- Ist X ein Schema, so meinen wir mit einem Punkt $x \in X$ einen abgeschlossenen Punkt, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist.

Literatur

[H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer Graduate Texts in Mathematics **52**, 1977.

[Mi] J. Milne, *Abelian Varieties*, in: G. Cornell, J. Silverman, *Arithmetic Geometry*, Springer, 1986.

[M] D. Mumford, *Abelian Varieties*, 2nd ed., Oxford University Press, 1974.

[R] M. Rosen, *Abelian Varieties over* $\mathbb{C}$, in: G. Cornell, J. Silverman, *Arithmetic Geometry*, Springer, 1986.

[SD] H. Swinnerton-Dyer, *Analytic Theory of Abelian Varieties*, Cambridge University Press, 1974.