Aufgabe 1 (Stetigkeit)**.** Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Sei $a \in X$. Zeigen Sie dass folgende Aussagen äquivalent sind: (2 Pkt.)

(a.1) f ist in a stetig.

(a.2) Für jede Umgebung U von $f(a)$ ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von a.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie:

(b.1) Für alle $A \subseteq X$ gilt $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$. (1 Pkt.)

(b.2) Für alle $B \subseteq Y$ gilt $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$. (1 Pkt.)

(c) Zeigen Sie dass folgende Aussagen äquivalent sind: (4 Pkt.)

(c.1) f ist stetig.

(c.2) Für jede offene Menge $G \subseteq Y$ ist das Urbild $f^{-1}(G) \subseteq X$ offen.

(c.3) Für jede abgeschlossene Menge $F \subseteq Y$ ist das Urbild $f^{-1}(F) \subseteq X$ abgeschlossen.

(d) Man nehme an dass f stetig ist. Zeigen Sie dass für jedes $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ abgeschlossen ist. (2 Pkt.)

Lösung. (a.1) $\implies$ (a.2): Sei U eine Umgebung von $f(a)$. Per Definition einer Umgebung existiert ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(f(a)) \subseteq U$. Per Definition von Stetigkeit existiert ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a))$. Also gilt $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(U)$.
(a.2) $\implies$ (a.1): Sei $\epsilon > 0$. Dann ist $U := B_\epsilon(f(a))$ eine Umgebung von $f(a)$. Nach Annahme ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von a. Per Definition einer Umgebung existiert ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(U)$. Also gilt $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a))$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ist f an der Stelle a stetig.
(b.1) Gegenbeispiel: $X = \{0, 1\}$, $Y = \{0\}$, $f(0) = f(1) = 0$, $A = \{0\}$.
(b.2) Die Aussage ist richtig, weil für alle $x \in X$ stets

$$x \in f^{-1}(Y \setminus B) \iff f(x) \in Y \setminus B \iff \neg(f(x) \in B) \iff \neg(x \in f^{-1}(B))$$

gilt.
(c.1) $\implies$ (c.2): Sei $G \subseteq Y$ offen und $a \in f^{-1}(G)$. Da $f(a) \in G$, ist G eine Umgebung von $f(a)$. Nach Teilaufgabe (a) ist $f^{-1}(G)$ also eine Umgebung von a. Da $a \in f^{-1}(G)$ beliebig war, ist $f^{-1}(G)$ offen.
(c.2) $\implies$ (c.1): Sei $a \in X$ und $\epsilon > 0$. Dann ist $G := B_\epsilon(f(a)) \subseteq Y$ offen (Lemma 8.2). Nach Annahme ist $f^{-1}(G) \subseteq X$ offen. Da $a \in f^{-1}(G)$ und per Definition der Offenheit ist $f^{-1}(G)$ eine Umgebung von a. Per Definition einer Umgebung existiert ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(G)$. Also gilt $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a))$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ist f in a stetig. Da a beliebig war, ist f stetig.
(c.2) $\implies$ (c.3): Sei $F \subseteq Y$ abgeschlossen. Dann ist $G := Y \setminus F \subseteq Y$ offen. Nach Annahme ist $f^{-1}(G) \subseteq X$ offen. Also ist $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(G)$ abgeschlossen.
(c.3) $\implies$ (c.2) Sei $G \subseteq Y$ offen. Dann ist $F := Y \setminus G \subseteq Y$ abgeschlossen. Nach Annahme ist $f^{-1}(F) \subseteq X$ abgeschlossen. Also ist $f^{-1}(G) = X \setminus f^{-1}(F)$ offen.
(d) Nach (c.3) reicht es zu zeigen dass die Teilmenge $F := \{y\} \subseteq Y$ abgeschlossen ist. In anderen Worten, ist $G := Y \setminus \{y\} \subseteq Y$ offen. Sei $y' \in G$. Da $y' \neq y$, gilt nach der Definition der Metrik dass $\epsilon := d(y, y') > 0$. Also ist $B_\epsilon(y') \subseteq G$. Damit ist G eine Umgebung von y'. Da dies für alle $y' \in G$ gilt, ist G offen. □

Aufgabe 2 (Kleinster Abstand, *Bonusaufgabe*)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $A, B \subseteq X$ definieren wir den kleinsten Abstand (siehe auch Übungsblatt 9, Aufgabe 2(c))

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

(a) Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$. Bestimmen Sie $\operatorname{dist}\big(\overline{B_r(x)}, \overline{B_s(y)}\big)$. (2 Bonuspkt.)

Beweisen oder widerlegen Sie:

(b) Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus A$. Dann ist $\operatorname{dist}(A, \{x\}) > 0$. (2 Bonuspkt.)

(c) Seien A, B abgeschlossene Teilmengen von X mit $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. (3 Bonuspkt.)

(d) Sei A eine abgeschlossene und B eine kompakte Teilmenge von X sodass $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. (3 Bonuspkt.)

Lösung. (a) Ist $\|x - y\|_2 \le r + s$, dann ist $\overline{B_r(x)} \cap \overline{B_s(y)} \neq \emptyset$ und deshalb $\operatorname{dist}\big(\overline{B_r(x)}, \overline{B_s(y)}\big) = 0$.

Sei nun $\|x - y\|_2 > r + s$ und betrachte $a \in \overline{B_r(x)}$ und $b \in \overline{B_s(y)}$. Aus der Dreiecksungleichung folgt dann $\|x-y\|_2 \le \|x-a\|_2 + \|a-b\|_2 + \|b-y\|_2 \le r + \|a-b\|_2 + s$ und deshalb $\|a-b\|_2 \ge \|x-y\|_2 - r - s$. Wählen wir $a = x - r\frac{x-y}{\|x-y\|_2}$ und $b = y + s\frac{x-y}{\|x-y\|_2}$, dann ist

$$\|a - b\|_2 = \left|1 - \frac{r}{\|x-y\|_2} - \frac{s}{\|x-y\|_2}\right| \|x - y\|_2 = \|x - y\|_2 - r - s.$$

Hieraus folgt also $\operatorname{dist}\big(\overline{B_r(x)}, \overline{B_s(y)}\big) = \|x - y\|_2 - r - s$.

(b) Da $X \setminus A$ offen ist, gibt es $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \in X \setminus A$. Deshalb gilt $d(a, x) \ge \epsilon$ für alle $a \in A$ und somit ist $\operatorname{dist}(A, \{x\}) \ge \epsilon > 0$.

(c) Gegenbeispiel: $X = \mathbb{R}^2$ (mit der Standardmetrik), $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ und $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = -1\}$. Diese Mengen sind abgeschlossen nach Teil (d) der Aufgabe 1. Für alle $x > 0$ gilt

$$\operatorname{dist}(A, B) \le \|(x, 1/x) - (-x, 1/x)\|_2 = \|(2x, 0)\|_2 = 2x$$

und deswegen $\operatorname{dist}(A, B) = 0$.

(d) Wir betrachten die Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(b) := \operatorname{dist}(A, \{b\})$. Wegen Teilaufgabe (b) ist $f(b) > 0$ für alle $b \in B$. Da B kompakt ist, folgt aus dem Satz vom Maximum (angewandt auf $-f$) dass ein $b \in B$ existiert mit $\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{x \in B} f(x) = f(b) > 0$. □

Aufgabe 3 (Gleichmäßig stetige Funktionen). Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $f : X \to Y$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann ist für jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X auch $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y. (2 Pkt.)

(b) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Funktion. Dann ist für jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X auch $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y. (2 Pkt.)

(c) Für jede gleichmäßig stetige Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ gibt es genau eine gleichmäßig stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. (2 Pkt.)

(d) Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ gibt es genau eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. (2 Pkt.)

(e) Für jede gleichmäßig stetige Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ gibt es genau eine gleichmäßig stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. (2 Pkt.)

Lösung. (a) Sei $\epsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ sodass für alle $x, x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ gilt $d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$. Da (x_n) Cauchy ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n, m \geq n_0$ gilt $d_X(x_n, x_m) < \delta$. Deshalb folgt für alle $n, m \geq n_0$ dass $d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon$, und somit ist $(f(x_n))$ Cauchy.

(b) Erstes Gegenbeispiel: $X = Y = (0, \infty)$, $f(x) := 1/x$. Dann ist $x_n = 1/n$ eine Cauchy-Folge aber $f(x_n) = n$ nicht.

Zweites Gegenbeispiel: Sei $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Y = \mathbb{R}$ und

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Dann ist $x_n := (-1)^n \frac{1}{n}$ eine Cauchy-Folge aber $f(x_n) = (-1)^n$ nicht.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir wählen eine Cauchy-Folge (x_n) in $\mathbb{Q}$ mit $\lim x_n = x \in \mathbb{R}$, und definieren $g(x) := \lim f(x_n)$. Ist (y_n) eine andere Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ mit $\lim y_n = x$, dann ist auch $(x_0, y_0, x_1, y_1, ...)$ eine Cauchy-Folge, und es folgt aus Teilaufgabe (a) dass auch $(f(x_0), f(y_0), f(x_1), f(y_1), ...)$ eine Cauchy-Folge ist. Insbesondere gilt dann $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$, und deshalb ist g wohldefiniert.

Wir zeigen zunächst dass g gleichmäßig stetig ist. Sei $\epsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ sodass für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $|a - b| < \delta$ gilt $|f(a) - f(b)| < \epsilon$. Seien nun $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta/3$. Wir wählen Cauchy-Folgen (x_n) und (y_n) in $\mathbb{Q}$ sodass $\lim x_n = x$ und $\lim y_n = y$. Dann sind (x_n) und (y_n) konvergent in $\mathbb{R}$, und wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \geq n_0$ gilt $|x_n - x| < \delta/3$ und $|y_n - y| < \delta/3$. Es folgt $|x_n - y_n| < \delta$ und deswegen

$$|g(x) - g(y)| = \lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \leq \epsilon.$$

(d) Gegenbeispiel:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x^2 > 2, \\ 0, & x^2 < 2. \end{cases}$$

(e) Gegenbeispiel: sei $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ gleichmäßig stetig aber nicht konstant (zum Beispiel $f = \mathrm{id}$). Nach Teilaufgabe (c) gibt es genau eine gleichmäßig stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Da f nicht konstant ist, gibt es $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $g(a) = f(a) \neq f(b) = g(b)$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt dass g alle (insbesondere auch die irrationale) Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt. Deshalb kann das Bild $g(\mathbb{R})$ keine Teilmenge von $\mathbb{Q}$ sein. □

Aufgabe 4 (Inneres, Abschluss, Rand)**.** Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik und $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussagen: (5 Pkt.)

(a) Für $n = 1$ gilt: Ist $A \neq \emptyset$ und $A \neq \mathbb{R}$, dann ist $\partial A \neq \emptyset$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ beliebig gilt: Ist $A \neq \emptyset$ und $A \neq \mathbb{R}^n$, dann ist $\partial A \neq \emptyset$.

Lösung. Beide Aussagen sind richtig, und wir geben den Beweis direkt für beliebiges $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
Wir wählen $x_0 \in A$ und $x_1 \in A^\complement = \mathbb{R}^n \setminus A$, und definieren

$$s := \sup\{t \in [0, 1] \mid x_t := x_0 + t(x_1 - x_0) \in A\}.$$

Wir behaupten dass $x_s \in \partial A$. Für alle $t \in [0, 1]$ mit $t > s$ gilt $x_t \notin A$, und somit gilt für alle $\epsilon > 0$ dass $B_\epsilon(x_s) \cap A^\complement \neq \emptyset$ (im Fall $s = 1$ gibt es kein $t > s$, aber dann ist schon $x_s = x_1 \in A^\complement$). Aber da s das

Supremum ist, gibt es $s - \epsilon < t < s$ sodass $x_t \in A$, und deswegen ist auch $B_\epsilon(x_s) \cap A \neq \emptyset$ (im Fall $s = 0$ gibt es kein $t < s$, aber dann ist schon $x_s = x_0 \in A$). Benutzen wir nun Aufgabe 4(b) vom Präsenzblatt 9, dann sehen wir dass $x_s \in \partial A$. $\square$

Aufgabe 5 (Eine stetige nicht-differenzierbare Funktion)**.** Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z})$, wobei dist in Übungsblatt 9, Aufgabe 2(c) definiert wurde. Weiter definieren wir $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (für $n \in \mathbb{N}$) und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) := 4^{-n} f(4^n x), \qquad \varphi(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} 4^{-n} f(4^n x).$$

(a) Zeigen Sie dass φ wohldefiniert ist. (1 Pkt.)

(b) Zeigen Sie dass f_n Lipschitz-stetig ist und dass

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |f_k(x) - f_k(y)| \leq \frac{1}{3 \cdot 4^m},$$

und beweisen Sie dass φ gleichmäßig stetig ist. (4 Pkt.)

(c) Zeigen Sie dass φ in keinem Punkt differenzierbar ist. (5 Pkt.)

Hinweis: Gegeben $x \in \mathbb{R}$, finden Sie eine Folge $h_n \to 0$ sodass $f_j(x + h_n) - f_j(x) = \pm h_n$ für $j \leq n$ und $f_j(x + h_n) = f_j(x)$ für $j > n$.

Lösung. (a) Die Funktion f ist positiv und $f(x) \leq 1/2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gilt also $\varphi(x) \leq 1/2 \sum 4^{-n}$. Da die geometrische Reihe konvergiert, ist φ wohldefiniert.

(b) Wir wissen aus Aufgabe 2 vom Übungsblatt 9 dass f Lipschitz-stetig mit Konstante 1 ist, und insbesondere ist f daher stetig. Hieraus folgt dass auch f_n Lipschitz-stetig mit Konstante 1 ist:

$$|f_n(x) - f_n(y)| = 4^{-n} |f(4^n x) - f(4^n y)| \leq 4^{-n} |4^n x - 4^n y| = |x - y|.$$

Wegen $0 \leq f(x) \leq 1/2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |f_k(x) - f_k(y)| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} 4^{-k}(1/2 + 1/2) = 4^{-m-1} \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} = 4^{-m-1} \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{1}{3 \cdot 4^m}.$$

Hieraus folgt

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \sum_{k=0}^{m} |f_k(x) - f_k(y)| + \sum_{k=m+1}^{\infty} |f_k(x) - f_k(y)| \leq (m+1)|x - y| + \frac{1}{3 \cdot 4^m}.$$

Gegeben $\epsilon > 0$, wählen wir $m \in \mathbb{N}$ so dass $1/(3 \cdot 4^m) < \epsilon/2$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta := \epsilon/(2(m+1))$ dass

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq (m+1)\delta + \frac{1}{3 \cdot 4^m} < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Hiermit ist bewiesen dass φ gleichmäßig stetig ist.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $n \in \mathbb{N}$. Es gibt $m \in \mathbb{Z}$ und $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ sodass $m+k/4 \leq 4^n x < m+(k+1)/4$. Ist $k = 0$ oder $k = 2$, dann setzen wir $h_n := 1/4^{n+1}$, und ist $k = 1$ oder $k = 3$, dann setzen wir $h_n := -1/4^{n+1}$. In alle Fälle gilt $|f(4^n(x+h_n)) - f(4^n x)| = 1/4$ sowie für $j = 0, 1, \dots, n$

$$|f_j(x+h_n) - f_j(x)| = 4^{-j}|f(4^j(x+h_n)) - f(4^j x)| = 4^{-j}|4^j h_n| = 1/4^{n+1}.$$

Für $j > n$ gilt $|f_j(x+h_n) - f_j(x)| = 0$ wegen $f(y+l) = f(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und $l \in \mathbb{N}$. Daher gilt

$$\frac{\varphi(x+h_n) - \varphi(x)}{h_n} = \sum_{j=0}^{n} \frac{f_j(x+h_n) - f_j(x)}{h_n} = \sum_{j=0}^{n} \pm 1,$$

und diese Folge ist offensichtlich nicht konvergent. $\square$