Analysis 3

14.01.2019
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: 22.01.2019 in der Vorlesung

universitätbonn

Übungsblatt 13

Aufgabe 1: **(2+2+1)+(2+2+1) = 10 Punkte**
Zeigen oder widerlegen Sie, ob die nachfolgenden linearen Abbildungen $S, T\colon (X, \|\cdot\|_X) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ wohldefiniert und beschränkt[1] sind, wobei $|\cdot|$ wie üblich den euklidischen Betrag bezeichne:

$$S\colon X \ni (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}, \quad T\colon X \ni (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n+1}},$$

wobei

(a) $(X, \|\cdot\|_X) = (\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1})$,

(b) $(X, \|\cdot\|_X) = (\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2})$,

(c) $(X, \|\cdot\|_X) = (\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$,

die auf dem letzten Übungsblatt eingeführten Folgenräume sind.

Aufgabe 2: **3 + 7 = 10 Punkte**
Sei für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) := \frac{1}{\sqrt{nx}} \chi_{[\frac{1}{n},1]}(x)$.

(a) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ für $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass $f_n \to f$ punktweise.

(b) Bestimmen Sie mit Beweis alle $p \in [1,\infty]$, so dass $\|f_n - f\|_p \to 0$, $n \to \infty$.

Aufgabe 3: **7.5 + 7.5 + 5 = 20 Punkte**
Betrachten Sie die Funktion $f\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in [0,\pi), \\ (x-2\pi)^2 & \text{für } x \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Entwickeln Sie f in eine Fourierreihe und bestimmen Sie hiermit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Betrachten Sie sodann die Fourierreihe der Funktion $\sqrt{f}$, um analog eine Formel für $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ zu finden und zu beweisen. Sie dürfen dabei das Ergebnis aus Übungsblatt 1, Aufgabe 1, benutzen.

Hinweis: Sie bestimmen in dieser Aufgabe also die Werte der sog. Zetafunktion

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

für $s = 2$ und $s = 4$.

---

[1] Im Sinne des Kapitels 2.3 der Analysis 2, d.h.: Es existiert ein $C > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt $|S(x)| \leq C\|x\|_X$ bzw. $|T(x)| \leq C\|x\|_X$.