Programm des Workshops
Köcher-Varietäten von Nakajima

Ulrich Görtz & Torsten Wedhorn

Themenübersicht

In diesem Workshop wollen wir uns mit den von Nakajima studierten Köcher-Varietäten befassen. Als Ziel des Workshops streben wir die Konstruktion von affinen Quantenalgebren und ihren endlich-dimensionalen Darstellungen mit Hilfe der K-Theorie von Köcher-Varietäten nach Nakajima [Na3] an. Wir geben hier eine sehr grobe Übersicht, die sich an [Sch] und [Na3] orientiert. Ein gute Übersicht ist auch der MathSciNet-Review des Artikels [Na3] von O. Schiffmann.

Sei $\mathfrak{g}$ eine einfache komplexe endlich-dimensionale Lie-Algebra vom Dynkin-Typ A, D oder E. Via des Dynkin-Diagramms von $\mathfrak{g}$ ordnet man $\mathfrak{g}$ einen gewissen Köcher Q mit Eckenmenge Q_0 und Kantenmenge Q_1 zu.

Nakajimas Köcher-Varietäten assoziiert zu Q

Indem man an jede Ecke von Q eine neue Kante und eine neue Ecke anhängt, erhält man einen Köcher T mit der doppelten Anzahl von Ecken. Die Varietät der komplexen Darstellungen von T eines festen Dimensionsvektors $(\mathbf{v},\mathbf{w}) = ((v_a)_{a\in Q_0}, (w_a)_{a\in T_0\setminus Q_0}) \in \mathbb{N}_0^{T_0}$ ist ein affiner Raum $E_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$. Sein Cotangentialraum $\bar{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ identifiziert sich mit der Varietät der Darstellungen der Dimension $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ des "verdoppelten" Köchers $\bar{T}$.

Als Cotangentialraum besitzt $\bar{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ die natürliche Struktur einer symplektischen Varietät. Ferner operiert die Gruppe $G_{\mathbf{v}} = \prod_a GL_{v_a}$ symplektisch auf $\bar{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ and man erhält eine ($G_{\mathbf{v}}$-äquivariante) Impulsabbildung

$$\mu\colon \bar{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}} \to \mathrm{Lie}(G_{\mathbf{v}})^*,$$

die eine einfache explizite Beschreibung besitzt. Sei $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_0^Q(\mathbf{v},\mathbf{w})$ der "brutale" algebraisch geometrische Quotient $\mu^{-1}(0)//G_{\mathbf{v}}$, und sei $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^Q(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \mu^{-1}(0)/_{\chi}G_{\mathbf{v}}$ der GIT-Quotient (abhängig von einem fixierten Charakter χ von $G_{\mathbf{v}}$). Dann ist $\mathfrak{M}$ eine glatte zusammenhängende symplektische Varietät und man hat einen projektiven Morphismus $\pi\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_0$ "vom Hilbert-Chow-Typ". Außerdem definiert man ein Analogon zur Steinberg-Varietät $\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{w})$, welche eine Lagrange-Untervarietät von $\mathfrak{M}(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}_2,\mathbf{w})$ ist.

Die Affine Quantenalgebra assoziiert zu $\mathfrak{g}$ und ihre Darstellungen

Auf der anderen Seite assoziiert man zu $\mathfrak{g}$ seine affine Quantenalgebra $U_q(L\mathfrak{g})$. Dies ist eine $\mathbb{C}(q)$-algebra, die explizit durch Erzeugende und Relationen gegeben ist. Man definiert außerdem eine $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$-Unteralgebra $U_{\mathbb{Z}}(L\mathfrak{g})$ und setzt für $\varepsilon \in \mathbb{C}^\times$

$$U_\varepsilon(L\mathfrak{g}) := U_{\mathbb{Z}}(L\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C},$$

wobei $\mathbb{C}$ durch $q \mapsto \varepsilon$ zu einer $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$-Algebra wird.

Sei ε fixiert, und wir nehmen an, dass ε keine Einheitswurzel ist. Für einen $U_\varepsilon(L\mathfrak{g})$-Modul M kann man analog zur klassischen Darstellungstheorie von Lie-Algebren den Begriff des l-(Höchst)gewichts (wobei "l" für "loop" steht) definieren. Für jedes l-Gewicht $\mathbf{P}$ existiert ein einfacher $U_\varepsilon(L\mathfrak{g})$-Modul $L(\mathbf{P})$ mit Höchstgewicht $\mathbf{P}$, man hat ein Kriterium welche einfache Moduln $L(\mathbf{P})$ endlich-dimensional sind, und jeder einfache endlich-dimensionale Modul ist von der Form $L(\mathbf{P})$.

Darstellungen von Affine Quantenalgebren in der K-Theorie von Köcher-Varietäten

Auf $\bar{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ operiert die Gruppe $G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{G}_m$, wobei $G_{\mathbf{w}} = \prod_a GL_{w_a}$ (welche trotz der analogen Bezeichnung eine ganz andere Rolle als $G_{\mathbf{v}}$ spielt). Man erhält induzierte Operationen auf $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_0$ und damit auf $\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w})$. Die äquivariante K-Theorie

$$K^{G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{G}_m}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})) := \prod_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} K^{G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{G}_m}(\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2))$$

trägt durch ein Konvolutionsprodukt die Struktur einer $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$-Algebra.

Nakajima zeigt, dass man einen Algebra-Homomorphismus

$$\Psi \colon U_{\mathbb{Z}}(L\mathfrak{g}) \to K^{G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{G}_m}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w}))/\text{Torsion}$$

hat. Dies ist einer der zentralen technischen Punkte von Nakajimas Artikel und geschieht durch eine Analyse der Geometrie von Hecke-Korrespondenzen.

Durch Spezialisierung von $K^{G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{G}_m}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w}))$ assoziiert Nakajima zu einem halbeinfachen Element $a \in G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{G}_m$ und zu einem von a fixierten regulären Punkt $x \in \mathfrak{M}_0$ einen Vektorraum $M_{x,a}$, der via Ψ zu einem endlich-dimensionalen $U_\varepsilon(L\mathfrak{g})$-Modul (genannt Standardmodul) mit einem explizit gegebenen l-Höchstgewicht wird.

Die Multiplizitäten einfacher Moduln $L(\mathbf{P}_{y,a})$ in den Standardmoduln $M_{x,a}$ schließlich sind durch $P_{x,y}(1)$ gegeben, wobei $P_{x,y}$ Polynome sind, deren Koeffizienten durch die Dimension von Schnittkohomologieräumen gegeben sind. Sie ähneln den Kazhdan-Lusztig-Polynomen und können auch durch einen rekursiven Algorithmus bestimmt werden.

Unsere Aufteilung auf die drei Treffen geschieht ungefähr (aber – aus Zeitgründen – nicht genau) entlang der oben angedeuteten Teilabschnitte. Selbstverständlich ist das unten stehende Programm nur ein Vorschlag. Die Themen innerhalb eines Treffens können nach Absprache der Vortragenden untereinander auch anders aufgeteilt werden. Auch die Zeitvorgaben sind nur Vorschläge. Die Gesamtvortragsdauer an einem Tag sollte allerdings 255 Minuten nicht überschreiten.

Um über den Workshop hinweg nicht dauernd neue Notationen einführen zu müssen, schlagen wir vor, sich durchgehend an die Notationen aus [Sch] zu halten.

Definition von Nakajimas Köcher-Varietäten

Programm für den 22. November 2008

An diesem Tag sollen die Köcher-Varietäten von Nakajima für einen beliebigen endlichen Köcher definiert und einige ihrer Eigenschaften bewiesen werden. Als Hauptreferenz empfehlen wir [Sch]. Eine andere nützliche Referenz ist auch [Na2], §3 (dort sind die Notationen leicht unterschiedlich). Als konsequent benutztes Beispiel sollte möglichst in allen Vorträgen das Hilbertschema von Punkten im $\mathbb{A}^2$ benutzt werden. Zur Vereinfachung von Aussagen und Beweisen ist es manchmal wahrscheinlich hilfreich anzunehmen, dass der Köcher keine Schleifen besitzt (selbst wenn der Köcher aus dem Beispiel welche besitzt). Für die Anwendungen in den folgenden Treffen ist diese Annahme harmlos.

1. Vortrag: GIT-Quotienten (60 Minuten)

Sei X eine affine Varietät, auf der eine reduktive Gruppe G operiert (für uns genügt der Fall $G \cong \prod_i \mathrm{GL}_{n_i}$).

(1) Kurze Erklärung des (Semi-)Stabilitätsbegriffs bezüglich eines Charakters χ von G, der Quotienten $X//G$ und $X/_\chi G$ und des projektiven Morphismus $\pi\colon X/_\chi G \to X//G$. Eine schöne Zusammenfassung findet man in [Rei] 3.3 und [Mu] Chapter 5 und 6) (in [Rei] ist die Situation spezieller, da X dort ein Vektorraum ist, aber die Resultate übertragen sich auf unsere allgemeinere Situation).

(2) Anwendung auf die Schemata von Punkten im $\mathbb{A}^2$ wie in [Sch] Proposition 2.1 erklärt.

2. Vortrag: Köcher-Varietäten (75 Minuten)

(1) Kurze Erinnerung an symplektische Varietäten X mit symplektischer Operation durch eine reduktive Gruppe G und an die Impulsabbildung $\mu\colon X \to \mathrm{Lie}(G)^*$ (z.B. [CG] Kapitel 1). Wir brauchen nur den Fall, dass X eine komplexe algebraische Varietät ist.

(2) Abschnitte 4.1 und Théorème 4.4 aus [Sch] (siehe auch [Na2] §3 oder [Cr1]).

(3) Die Beispiele $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ und $S^n\mathbb{C}^2$ ([Sch] Abschnitt 2.3).

3. Vortrag: Eigenschaften von $\pi\colon \mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \to \mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ (60 Minuten)

(1) Definition des regulären Orts $\mathfrak{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ und Eigenschaften ([Sch] Abschnitt 4.2, [Na1] §3, [Cr2]).

(2) [Sch] Théorème 4.6 (= [Na2] Corollary 10.11) inklusive der Erklärung der Begriffe "crepante Desingularisierung" und "halb-kleine Desingularisierung".

4. Vortrag: Hecke-Korrespondenzen und die Lagrangesche Untervarietät $\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{w})$ (60 Minuten)

[Sch] Abschnitt 4.3 (siehe auch [Na2] §§5–7 und [Na3] §5).

K-Theorie von Köcher-Varietäten; Darstellungen von affinen Quantenalgebren

Programm für den 13. Dezember 2008

An diesem Tag sollen zum einen die K-Theorie von Köcher-Varietäten und zum anderen die affinen Quantenalgebren und ihre Darstellungen definiert werden. Unsere Hauptquellen sind der Übersichtsartikel [Sch] und die Originalarbeit [Na3]. Erst beim letzten Treffen werden dann K-Theorie und affine Quantenalgebren in Verbindung gebracht.

1. Vortrag: Äquivariante K-Theorie (75 Minuten)
Dieser Vortrag soll eine kurze Einführung geben in die äquivariante K-Theorie für eine quasi-projektive Varietät, auf der eine reduktive Gruppe operiert. In jedem Fall soll die Definition, ein paar Beispiele und die in [Na3] §3, angegebenen Eigenschaften erklärt werden. Als Referenz kann die in loc. cit. angegebene Literatur (insbesondere [CG] Chapter 5) dienen.

2. Vortrag: K-Theorie von Köcher-Varietäten (90 Minuten)

(1) Operation von $G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{G}_m$ auf $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_0$ und damit auf $\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w})$ ([Sch] or [Na3] Abschnitte 2.7 und 7.3).
(2) Die $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$-Algebrastruktur auf $K^{G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{G}_m}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w}))$: Dies ist sehr kurz in [Sch] dargestellt, in [Na3] §8 findet man Details. Das Produkt wird durch Konvolution gegeben. Eine analoge (und daher vielleicht hilfreiche) Konstruktion findet man in [CG] Chapter 8.

3. Vortrag und 4. Vortrag: Affine Quantenalgebren und Höchstgewichtsdarstellungen (90 Minuten)
In diesen Vorträgen sollen "Drinfelds Realisierung" von $U_q(L\mathfrak{g})$, die Unteralgebra $U_{\mathbb{Z}}(L\mathfrak{g})$ und ihre Spezialisierungen $U_\varepsilon(L\mathfrak{g})$ beschrieben werden. Anschließend soll die Theorie der Höchstgewichte und der Höchstgewichtsmoduln erklärt werden. Referenzen sind [Sch] Abschnitt 7.1, [Na3] Abschnitte 1.1 und 1.2, [CP2]; siehe auch [Ch] (wo endlich-dimensionale $L\mathfrak{g}$-Moduln beschrieben werden), [CP1] (wo der Fall von Darstellungen von $U_q(\mathfrak{g})$ beschrieben wird) und [Lu]).

K-Theorie von Köcher-Varietäten und Darstellungen von affinen Quantenalgebren

Programm für den 17. Januar 2008

Bei diesem Treffen geht es um die Konstruktion von endlich-dimensionalen Darstellungen von affinen Quantenalgebren (sogenannte Standardmoduln) mit Hilfe der K-Theorie von Köchervarietäten. Die Standardmoduln sind in der Regel nicht einfach. Vorträge 3 und 4 werden sich daher mit den einfachen Moduln und ihren Multiplizitäten in den Standardmoduln befassen.

1. Vortrag: Konstruktion von Ψ (60 Minuten)

In diesem Vortrag soll die Konstruktion des Algebra-Homomorphismus ([Na3] 9.4.1)

$$\Psi\colon U_q(L\mathfrak{g}) \to K^{G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{G}_m}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})) \otimes_{\mathbb{C}[q,q^{-1}]} \mathbb{C}(q)$$

und seiner Einschränkung ([Na3] 12.2.1)

$$\Psi\colon U_{\mathbb{Z}}(L\mathfrak{g}) \to K^{G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{G}_m}(\mathbf{w})/\text{Torsion}.$$

erklärt werden. Es wird sicherlich nicht möglich sein, alle Relationen nachzurechnen. Einen Überblick über die Konstruktion gibt [Sch] Abschnitt 7.3.

2. Vortrag: Standardmoduln (60 Minuten)

In diesem Vortrag sollen die Standardmoduln $M_{x,a}$ (ihre Konstruktion und ihr l-Höchstgewicht) erklärt werden ([Sch] Abschnitt 7.4, [Na3] Abschnitte 13.1 bis 13.3, [VV]).

3. Vortrag und 4. Vortrag: Einfache Moduln und Multiplizitäten (135 Minuten)

Hier sollen [Na3] §15 und die dafür nötigen Ideen behandelt werden.

Literaturverzeichnis

[CG] N. Chriss, V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser Boston Inc. (1997).

[Ch] V. Chari, *Integrable representations of affine Lie-algebras*, Invent. Math. **85** (1986), 317–335.

[CP1] V. Chari, A. Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press (1994).

[CP2] V. Chari, A. Pressley, *Quantum affine algebras at roots of unity*, Representation Theory **1** (1997), 280–328.

[Cr1] W. Crawley-Boevey, *Geometry of the moment map for representations of quivers*, Comp. Math. **126** (2001), 257–293.

[Cr2] W. Crawley-Boevey, *Normality of Marsden-Weinstein reductions for representations of quivers*, Math. Ann. **325** (2203), 55–79.

[Lu] G. Lusztig, *Introduction to quantum group*, Progress in Math. **110**, Birkhäuser (1993).

[Mu] S. Mukai, *An Introduction to Invariants and Moduli*, Cambridge Studies in advanced mathematics **81**, Cambridge University Press (2003).

[Na1] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. **76** (1994), 365–416.

[Na2] H. Nakajima, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. **91** (1998), 515–560.

[Na3] H. Nakajima, *Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebras*, J. AMS **14** (2000), 145–238.

[Rei] M. Reineke, *Moduli of Representations of Quivers*, Preprint, ArXiV:0802.2147.

[Sch] O. Schiffmann, *Variétés carquois de Nakajima*, Preprint, erscheint in Astérisque; wir (wedhorn@math.uni-paderborn.de, ugoertz@math.uni-bonn.de) haben vom Autor die Erlaubnis, das Preprint auf Nachfrage zu verschicken.

[VV] M. Varagnolo, É. Vasserot, *Standard modules of quantum affine algebras*, Duke Math. J. **111** (2002), 509–533.