Mathematisches Institut der Universität Bonn
Prof. Dr. M. Rapoport
U. Schlickewei

Seminar zur Kommutativen Algebra

Sommersemester 2007

Es soll in Einzelvorträgen das Buch *Commutative Algebra* von Atiyah/Macdonald durchgearbeitet und mit Beispielen angereichert werden. Für eine heuristische Diskussion der geometrischen Anschauung ist ein Blick in das Buch *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry* von Eisenbud empfehlenswert.

Das Seminar eignet sich als Parallelveranstaltung zur Vorlesung zur Algebraischen Geometrie 1 von Herrn Görtz.

Interessenten melden sich bitte per E-Mail (`uli@math.uni-bonn.de`) oder telefonisch (0228/733308) bei Herrn Schlickewei, so dass schon in den Semesterferien die ersten Vorträge vergeben werden können.

Termin und Ort

Donnerstags 14-16 Uhr, Seminarraum B, Beringstraße 4
erste Veranstaltung am 5.4.2007

Vorträge

1. Vortrag - Ringe und Ideale, affine Schemata (1 Sitzung)
(siehe [1], Kap. 1)

- Primideale und maximale Ideale
- Existenz maximaler Ideale (Thm. 1.3), also ist $f \in A$ genau dann in keinem maximalen Ideal enthalten, wenn f eine Einheit ist
- lokale Ringe
- Nilradikal (Prop. 1.7-1.8)
- Primvermeidung (Prop. 1.11)
- Spektrum eines Rings, Zariskitopologie, Beispiele (ÜA 15-16)
- Spektrum eines Quotientenrings (Prop. 1.1)
- die abgeschlossenen Punkte (d.h. die maximalen Ideale, warum?) einer affinen, algebraischen Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper sind die Nullstellen der definierenden Gleichungen in k^n (natürlich ist hier nicht der Hilbertsche Nullstellensatz zu beweisen) (ÜA 27)

- Ringhomomorphismen und stetige Abbildungen zwischen den zugehörigen Spektra (ÜA 21) (beispielsweise ist $\mathrm{Spec}(A/I) \to V(I)$ ein Homöomorphismus)

2. Vortrag - Moduln und Tensorprodukte (1 - 2 Sitzungen)
(siehe [1], Kapitel 2).

- exakte Sequenzen von Moduln, Linksexaktheit des Hom-Funktors oder kategorielle Charakterisierung von Kern und Kokern (Prop. 2.9), ist Hom rechtsexakt?
- das Jacobson-Radikal eines Rings (Prop. 1.9)
- endlich erzeugte Moduln und das Lemma von Nakayama (Prop. 2.4 - 2.8)
- Existenz und universelle Eigenschaft des Tensorprodukts (Prop. 2.12)
- kanonische Isomorphismen (von denen man einen exemplarisch beweise, Prop. 2.14)
- Beispiele (etwa Tensorprodukt von Vektorräumen, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m$)
- Rechtsexaktheit des Tensorproduktes über die Linksadjungiertheit zum Hom-Funktor (Prop. 2.18)
- $A/I \otimes_A M \simeq M/IM$ als Anwendung

3. Vortrag - Lokalisierung (1 Sitzung)
(siehe [1], Kap. 3).

- Konstruktion und universelle Eigenschaft (Prop. 3.1) der Lokalisierung eines Rings in einer multiplikativen Menge
- Beispiele 1) - 3) und 5) auf Seite 38
- Konstruktion von Lokalisierungen von Moduln
- Exaktheit der Lokalisierung (Prop. 3.5)
- die Lokalisierung von M in S ist kanonisch isomorph zu $S^{-1}A \otimes_A M$ (Prop. 3.7)
- lokale Eigenschaften (Prop. 3.8 - 3.9)
- Ideale von $S^{-1}A$ sind von der Form $S^{-1}I$ für ein Ideal $I \subset A$
- Primideale von $S^{-1}A$ sind in Bijektion mit Primidealen von A, die S nicht treffen

4. Vortrag - Induktiver Limes, flache Moduln (1 Sitzung)
(siehe [1], Kap. 2, ÜA 14-26)

- Konstruktion und universelle Eigenschaft des induktiven Limes induktiver Systeme von Moduln (ÜA 14-16)
- Beispiele: Vereinigung von Untermoduln eines gegebenen Moduls (ÜA 17), direkte Summe einer Familie von Moduln, Kokern eines Homomorphismus zweier Moduln
- Homomorphismen induktiver Systeme und Exaktheit von gerichteten, induktiven Limites (ÜA 18-19)
- induktive Limites vertauschen mit Tensorprodukten (was übrigens erneut die Rechtsexaktheit des Tensorproduktes beweist, ÜA 20)
- Gegenbeispiel zur Linksexaktheit des Tensorproduktes, flache Moduln (Prop. 2.19)
- falls Zeit bleibt: Flachheit ist eine lokale Eigenschaft (Prop. 3.10)

5. Vortrag - Ganze Abhängigkeit (1 - 2 Sitzungen)
(siehe [1], Kap. 5)

- Definition und Charakterisierung von ganzer Abhängigkeit (Prop. 5.1)
- ganzer Abschluss
- Transitivität der ganzen Abhängigkeit
- der ganze Abschluss von A in B ist ganz abgeschlossen in B
- ganz abgeschlossene Ringe, faktorielle Ringe sind ganz abgeschlossen
- ganze Erweiterungen und Quotienten bzw. Lokalisierungen (Prop. 5.6)
- eine ganze Erweiterung eines Integritätsbereiches A ist genau dann ein Körper, wenn A einer ist (Prop. 5.7)
- 1. und 2. Satz von Cohen-Seidenberg (Thm. 5.10 und Going-up Theorem)
- ganzer Abschluss und Lokalisierungen kommutieren (Prop. 5.12)
- ganz abgeschlossen zu sein ist eine lokale Eigenschaft (Prop. 5.13)
- der ganze Abschluss in separablen Erweiterungen ist endlich erzeugt (Prop. 5.17)

6. Vortrag - Der Hilbertsche Nullstellensatz (1 Sitzung)
(siehe [2], Kap. 4.5)

- Jacobson-Ringe und Rabinowitchs Trick
- die allgemeine Form des Nullstellensatzes (Thm. 4.19)

- der klassische Nullstellensatz (Cor. 1.9)
- Radikal eines Ideals in einer Polynomalgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper (Thm. 1.6)
- falls Zeit bleibt: einige geometrische Folgerungen aus dem Nullstellensatz: abgeschlossene Punkte sind *sehr dicht* in affinen k-Varietäten (siehe [1], Kap. 5, ÜA 26, wir verstehen unter einer affinen k-Varietät das Spektrum einer endlich erzeugten k-Algebra (siehe 2. Vortrag)), abgeschlossene Punkte gehen unter regulären Abbildungen (siehe [1], Kap. 1, ÜA 28) zwischen affinen k-Varietäten auf abgeschlossene Punkte (was im allgemeinen für Abbildungen zwischen affinen Schemata nicht richtig ist, Beispiel)

7. Vortrag - Kettenbedingungen (1 Sitzung)
(siehe [1], Kap. 6)

- aufsteigende und absteigende Kettenbedingung, äquivalente Formulierung mit Hilfe der Maximal-/Minimalbedingung, Noethersche und Artinsche Moduln
- Beispiele
- ein Modul ist genau dann Noethersch, wenn alle Untermoduln endlich erzeugt sind
- Kettenbedingungen und kurze exakte Sequenzen, Folgerungen
- Länge eines Moduls (Prop. 6.7)
- Moduln endlicher Länge (Prop. 6.8)

8. Vortrag - Noethersche und Artinsche Ringe (1 Sitzung)
(siehe [1], Kap. 7 und Kap. 8)

- Lokalisierungen Noetherscher (Artinscher) Ringe sind Noethersch (Artinsch) (Prop. 7.3)
- Hilbertscher Basissatz (Thm. 7.5) mit Folgerungen (Cor. 7.6 - 7.7)
- in Artinschen Ringen sind Primideale maximal und es gibt nur endlich viele solche (insbesondere besteht der topologische Raum Spec(A) aus endlich vielen Punkten, falls A Artinsch)
- das Nilradikal Artinscher Ringe ist nilpotent
- Artinsche Ringe sind Noethersch (siehe [3], Thm. 3.2, mit der geleisteten Vorarbeit ist nur der letzte Abschnitt in diesem Beweis neu für uns; benutze jetzt, dass die Funktion, die einem Modul seine Länge zuordnet additiv ist ([1], Def. auf S. 23 unten und Prop. 6.9))

- Fazit: Artinsche Ringe sind Noethersch und haben Dimension 0 (führe hier kurz den Begriff der Dimension eines Ringes ein) und umgekehrt (die Rückrichtung ohne Beweis)

9. Vortrag - Dedekindringe und diskrete Bewertungsringe (1 Sitzung)
(siehe [1], Kap. 9)

- Bewertungsringe ([1], Kapitel 5)
- Bewertungsringe sind lokale, ganz abgeschlossene Ringe (Prop. 5.18)
- diskrete Bewertungsringe, Beispiele
- diskrete Bewertungsringe sind Noethersch
- verschiedene Charakterisierungen von diskreten Bewertungsringen (Prop. 9.2)
- die globale Version von diskreten Bewertungsringen sind Dedekindringe (Thm. 9.3)
- jedes Ideal in einem Dedekindring läßt sich auf eindeutige Weise als Produkt von Primidealen schreiben (ohne Beweis)
- Beispiele von Dedekindringen ($\mathbb{Z}$ und allgemeiner der Ring der ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers (Thm. 9.5))

Wenn wir noch Zeit haben:

(10. Vortrag - Das Lemma von Artin-Rees und Vervollständigungen)

(11. Vortrag - Dimensionstheorie)

Literatur

[1] M. Atiyah and I. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[2] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, GTM, vol. 150, Springer, 1995.

[3] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, 1989.