Notizen zu Residuen, Dualität und Riemann-Roch auf Kurven

Jakob Stix

Mathematisches Institut der Universität Bonn

10. Mai 2005

Zusammenfassung — Ziel dieser Notizen ist es, den Satz von Riemann-Roch für Kurven entlang der Quelle [Se1] zu beweisen. Im Unterschied zu [Se1] verlangen wir nicht, daß der Grundkörper algebraisch abgeschlossen ist und wir greifen auch für die wesentliche Endlichkeitsaussage nicht auf die Endlichdimensionalität der Kohomologie eigentlicher Varietäten zurück. Zur Konstruktion des Residuums und zum Beweis von Adjunktionsformel und Residuensatz verweisen wir auf die Arbeit von Tate [Ta].

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Problem von **Riemann-Roch** fragt nach der Dimension des Raums der rationalen Funktionen auf Kurven, die nur Pole von gegebener beschränkter Ordnung in endlich vielen gegebenen Punkten auf einer glatten, projektiven Kurve haben. Besser verhält sich eine **Eulercharakteristik**, die unter geeigneten Bedingungen an den erlaubten Poldivisor mit der gesuchten Dimension übereinstimmt.

Nachdem man den Korrekturterm mittels **Repartitionen** bestimmt hat, folgt die Formel für die Eulercharakteristik sofort. Entscheidend für die Nützlichkeit der Formel ist Zweierlei: zum einen sind die auftretenden Terme endlich: der **Kohärenzsatz**; zum andern kann man den Korrekturterm als Dimension des Dualraums der rationalen Funktionen zum dualen Poldivisor zu interpretieren. Diese **Dualität** wird durch eine Paarung mittels der **Residuen** in den Punkten der Kurve vermittelt. Die Paarung ist wohldefiniert Dank des **Residuensatzes**.

Nach einer kurzen Zusammenfassung dessen, was wir über Kurven, Divisoren und Linienbündel benutzen wollen, werden wir in den darauf folgenden Kapiteln das obige Programm bestreiten.

2 Kurven

Wir behandeln Kurven über einem Körper k. Als allgemeine Referenz sei auf [Ha] und [Fu] verwiesen.

Definition 2.1. *(1) Eine* **reguläre, eigentliche Kurve** *über dem Körper k ist ein reguläres, eigentliches, geometrisch zusammenhängendes und geometrisch reduziertes Schema X/k der Dimension 1. Die Kurve heißt* **glatt***, falls die Garbe der Differentiale $\Omega_{X/k}$ lokal frei vom Rang 1 ist.*

(2) Den Körper $K(X)$ der rationalen Funktionen auf einer regulären Kurve X/k nennt man ihren **Funktionenkörper***.*

Die Bedingung, geometrisch zusammenhängend und reduziert zu sein, ist äquivalent dazu, daß $K(X)/k$ eine separable, endlich erzeugte und relativ algebraisch abgeschlossene Körpererweiterung ist. Diese Bedingungen sind über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k automatisch erfüllt, wenn X/k reduziert und irreduzibel ist. Die Dimension spiegelt sich im Transzendezgrad 1 der Körpererweiterung $K(X)/k$ wieder.

Satz 2.2. *Die Menge der abgeschlossenen Punkte X_0 einer regulären, eigentlichen Kurve X/k steht in Bijektion mit der Menge der diskreten k-Bewertungen des Funktionenkörpers $K(X)/k$. Einem Punkt $x \in X_0$ wird sein lokaler Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ zugeordnet.*

Beweis: Die lokalen Ringe sind regulär von Dimension 1 also diskrete Bewertungsringe. Der Satz folgt aus dem Bewertungskriterium für eigentliche Morphismen. □

Satz 2.3. *(1) Rationale Abbildungen von einer regulären Kurve in eine eigentliche Varietät sind überall definiert.*

(2) Eine nichtkonstante rationale Funktion auf einer regulären, eigentlichen Kurve X/k, also ein Element $f \in K(X) \setminus k$, entspricht eineindeutig einer endlichen Abbildung $X \to \mathbb{P}^1_k$, die ebenfalls mit f bezeichnet wird.

Beweis: Dies folgt wieder aus dem Bewertungskriterium. Nur die Endlichkeit von f ist unklar. Sei Y die Normalisierung von $\mathbb{P}^1_k$, dessen Funktionenkörper mit $k(f)$ identifiziert wird, in der endlichen Erweiterung $K(X)/k(f)$. Dies ist eine reguläre, eigentliche Kurve, und die Abbildung f faktorisiert über ein birationales $\varphi : X \to Y$. Nach der Beschreibung der abgeschlossenen Punkte und ihrer lokalen Ringe ist φ bijektiv und ein Isomorphismus der lokalen Ringe. Somit ist f isomorph zur Normalisierungsabbildung, welche nach dem Theorem über die Endlichkeit der Normalisierung für endlich erzeugte Algebren über einem Körper endlich ist. □

Korollar 2.4. *Reguläre, eigentliche Kurven sind projektiv.*

Beweis: Dies folgt aus der Identifikation der Kurve mit der Normalisierung des $\mathbb{P}^1_k$ und dem Satz, daß endlich über projektiv wieder projektiv ist. □

Satz 2.5. *Ist k ein perfekter Körper, so ist jede reguläre Kurve glatt. Genauer liefert das Differential einer Uniformisierenden lokal einen erzeugenden Schnitt für die Garbe der Differentiale.*

Beweis: Sei $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt, $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ das maximale Ideal und $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$. Dann ist

$$\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \xrightarrow{d} \Omega_{X/k,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x) \to \Omega_{\kappa(x)/k} \to 0$$

exakt. Es verschwindet $\Omega_{\kappa(x)/k}$, da die Restklassenkörpererweiterung separabel ist. Nach Nakayama wird somit $\Omega_{X/k,x}$ von dt für jeden lokalen Parameter t von $\mathcal{O}_{X,x}$ als $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul erzeugt, und sogar frei erzeugt, da $\Omega_{X/k,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} K(X) = \Omega_{K(X)/k}$ von Dimension 1 ist. □

Da im Folgenden stets nur reguläre, eigentliche Kurven auftreten, lassen wir der Faulheit/Ökonomie folgend die beiden Adjektive in stillschweigender Übereinkunft fallen. Eine glatte Kurve ist also im Folgenden eine reguläre, eigentliche Kurve, die überdies glatt ist.

Lemma 2.6. *Eine Kurve X/k besitzt einen abgeschlossenen Punkt $x \in X$ mit separabler Restklassenkörpererweiterung $\kappa(x)/k$.*

Beweis: Für perfekte k ist nichts zu zeigen. Dies erledigt endliche Körper. Ansonsten wählen wir Erzeuger t, f von $K(X)/k$, so daß $K(X)/k(f)$ separabel von t mit Minimalpolynom $F(T)$ erzeugt wird.

Der generische Halm $(\Omega_{X/\mathbb{P}^1_k})_\eta$ der relativen Differentiale der Abbildung $f : X \to \mathbb{P}^1_k$ stimmt mit $\Omega_{K(X)/k(f)} = K(X)dt/F'(t)dt = 0$ überein. Daher gibt es offene Teile $\mathrm{Spec}(A) = U \subset \mathbb{P}^1_k$ und $\mathrm{Spec}(B) = V = f^{-1}(U)$ mit $\Omega_{V/U} = 0$. Ohne Einschränkung dürfen wir $B = A[T]/(F(T))$ annehmen. Es ist also $F'(t)$ eine Einheit in B, da $\Omega_{U/V} = Bdt/F'(t)dt$.

Wir wählen einen k-rationalen Punkt $a \in U$, also einen k-Algebrenhomomorphismus $A \twoheadrightarrow k$ mit Kern $\mathfrak{m}_a$. Hier benötigen wir, daß k unendlich ist, denn $U(k)$ ist eine koendliche Teilmenge von $\mathbb{P}^1_k(k) = k \cup \{\infty\}$. Wir schreiben $\overline{F}(T)$ für $F(T)$ modulo $\mathfrak{m}_a$. Es ist $\overline{F}(T)$ immer noch separabel.

Damit ist über a die schematische Faser $\operatorname{Spec}(B \otimes_A k)$ gleich $\operatorname{Spec}\big(k[T]/(\overline{F}(T))\big)$ eine disjunkte Vereinigung von separablen Körpererweiterungen von $\kappa(a) = k$. $\square$

3 Divisoren und Linienbündel

Definition 3.1. *Ein Divisor auf einer Kurve X/k ist eine formale Summe von abgeschlossenen Punkten, also ein Element in der Gruppe der Divisoren*

$$\operatorname{Div}(X) = \bigoplus_{x \in X_0} \mathbb{Z} \cdot x.$$

Ein Divisor heißt **effektiv***, falls alle Koefizienten nicht negativ sind. Für zwei Divisoren D, D' schreibt man $D' \geq D$ falls der Divisor $D' - D$ effektiv ist.*

Lemma–Definition 3.2. *Ein Linienbündel auf einer Kurve ist eine kohärente Garbe, die lokal auf der Kurve isomorph ist zur Strukturgarbe. Die Menge* $\operatorname{Pic}(X)$ *der Linienbündel bis auf Isomorphie auf der Kurve X/k ist eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung Tensorprodukt.*

Die grundlegende Konstruktion ordnet einem Divisor $D = \sum n_x \cdot x$ auf der Kurve X/k ein Linienbündel $\mathscr{L}(D)$ als Unterbündel der konstanten Funktionenkörpergarbe $\mathscr{K}$, definiert durch $U \mapsto \mathscr{K}(U) = K(X)$, zu:

$$\mathscr{L}(D)\big(U\big) := \{f \in K(X) \mid \nu_x(f) + n_x \geq 0 \ \text{ für alle } x \in X_0 \cap U\},$$

wobei ν_x die zu x gehörende Bewertung von $K(X)$ ist. Dies ist in der Tat ein Linienbündel, da man zu $x \in X$ ein Element $s_x \in K(X)$ wählen kann mit $\nu_x(s_x) = -n_x$ und dann für eine geeignet kleine Umgebung U von x gilt:

$$\mathscr{L}(D)|_U = s_x \cdot \mathcal{O}_X|_U \cong \mathcal{O}_X|_U.$$

Lemma–Definition 3.3. *(1) Der* **Hauptdivisor** *zu einer rationalen Funktion $f \in K(X)$ ist $\operatorname{div}(f) = \sum_{x \in X_0} \nu_x(f) \cdot x$. Dieser schreibt sich eindeutig als Differenz $\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}_0(f) - \operatorname{div}_\infty(f)$ der effektiven Divisoren der Nullstellen bzw. Polstellen von f:*

$$\operatorname{div}_0(f) = \sum_{\nu_x(f) > 0} \nu_x(f) \cdot x \quad \text{und} \quad \operatorname{div}_\infty(f) = \sum_{\nu_x(f) < 0} -\nu_x(f) \cdot x.$$

(2) Es gilt $\operatorname{div}(fg) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g)$.

(3) Divisoren, deren Differenz ein Hauptdivisor ist, heißen **linear äquivalent**.

(4) Der **Divisor** $\operatorname{div}(s)$ *eines rationalen Schnitts* $0 \neq s \in \mathscr{L}_\eta$ *(der Punkt η ist der generische von X) des Linienbündels $\mathscr{L}$ ist definiert durch* $\operatorname{div}(s) = \sum_{x \in X_0} n_x \cdot x$ *mit* $s\mathcal{O}_{X,x} = t_x^{n_x} \mathscr{L}_x$ *in $\mathscr{L}_\eta$, wobei t_x eine Uniformisierende im Punkt x ist. Für $\mathscr{L} = \mathcal{O}_X$ stimmen die beiden Definitionen eines Divisors zu $f \in K(X) = \mathcal{O}_{X,\eta}$ überein.*

Satz 3.4. *Die Zuordnung* $D \mapsto \mathscr{L}(D)$ *ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus* $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$*, dessen Kern die Gruppe der Hauptdivisoren ist. Das Urbild eines Linienbündels ist genau die Menge der Divisoren seiner nichttrivialen rationalen Schnitte.*

Der Satz von Riemann-Roch versucht die Dimension des Raums der globalen Schnitte $\mathrm{L}(D) := \mathscr{L}(D)(X) = \mathrm{H}^0\big(X, \mathscr{L}(D)\big)$ von $\mathscr{L}(D)$ als Vektorraum über k zu bestimmen.

Definition 3.5. *Wir setzen* $\ell(D) := \dim_k \mathrm{H}^0\big(X, \mathscr{L}(D)\big)$ *für einen Divisor* D *auf einer Kurve* X/k*.*

Definition 3.6. *(1) Der Grad eines Divisors* $D = \sum_{x \in X_0} n_x \cdot x$ *ist*

$$\deg(D) = \sum_{x \in X_0} n_x \cdot [\kappa(x) : k] \in \mathbb{Z}.$$

(2) Der Grad definiert einen Gruppenhomomorphismus $\deg : \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$*, der aufgrund des folgenden Satzes über* $\mathrm{Pic}(X)$ *faktorisiert und somit für ein Linienbündel* $\mathscr{L}$ *auf einer Kurve den Grad* $\deg(\mathscr{L}) \in \mathbb{Z}$ *definiert.*

Satz 3.7. *(1) Der Grad eines Hauptdivisors ist* 0*. (2) Sei* $f \in K(X)$ *eine nicht konstante, rationale Funktion auf der Kurve* X/k*. Dann gilt*

$$\deg\big(\mathrm{div}_0(f)\big) = [K(X) : k(f)] = \deg\big(\mathrm{div}_\infty(f)\big).$$

Diese Zahl nennt man den Grad der zugehörigen Abbildung $f : X \to \mathbb{P}^1_k$*.*

Beweis: Dies folgt aus der 'Fundamentalen Gleichung' für endliche Dedekindringerweiterungen, siehe [Se2]. Es codiert $\mathrm{div}_0(f)$ (bzw. $\mathrm{div}_\infty(f)$) die Faser von $f : X \to \mathbb{P}^1_k$ über 0 (bzw. ∞) inklusive der Multiplizitäten. □

Definition 3.8. *(1) Einen Divisor* K *auf einer glatten Kurve* X/k *nennt man einen* **kanonischen Divisor***, falls* $\Omega_{X/k}$ *isomorph ist zu* $\mathscr{L}(K)$*.*

(2) Die Dimension $g := \ell(K) = \dim_k \Omega_{X/k}(X)$ *nennt man das* **Geschlecht** *der glatten Kurve* X/k*.*

(3) Das Tensorprodukt $\Omega_{X/k} \otimes \mathscr{L}(D)$ *bezeichnen wir mit* $\Omega_{X/k}(D)$*.*

Lemma–Definition 3.9. *Der Raum der globalen Schnitte von* $\Omega_{X/k}(D)$ *ist kanonisch isomorph zum Raum der rationalen Differentiale*

$$\Omega_{K(X)/k}(D) = \{\omega \in \Omega_{K(X)/k} \mid \mathrm{div}(\omega) + D \geq 0\},$$

wobei $\mathrm{div}(\omega)$ *den Divisor als rationalen Schnitt von* $\Omega_{X/k}$ *bezeichne.*

Ein kanonischer Divisor ist nur eindeutig bestimmt bis auf lineare Äquivalenz: dies sind genau die Divisoren von nicht verschwindenden rationalen Schnitten von $\Omega_{X/k}$. Daß das Geschlecht einer glatten Kurve endlich ist, muß noch nachgewiesen werden. Jedenfalls gilt $g \geq 0$.

4 Repartitionen und Eulercharakteristik

Wir fixieren im Folgenden eine glatte Kurve X/k. Die Komplettierung des Funktionenkörpers $K = K(X)$ an der Stelle x, also den Quotientenkörper von $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ bezeichnen wir mit $K(X)_x$.

Definition 4.1. *(1) Der Ring* $\mathrm{R} = \mathrm{R}_X$ *der* **Weil-Repartitionen** *oder* **Adele** *auf* X *ist gegeben durch*

$$\mathrm{R} = \{(r_x)_{x \in X_0} \mid r_x \in K(X)_x, \text{ fast alle } r_x \in \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}\}$$

mit komponentenweiser Addition und Multiplikation.

(2) Die Repartitionen $\mathrm{R}(D)$ *mit durch den Divisor* $D = \sum n_x \cdot x \in \mathrm{Div}(X)$ *beschränkter Polordnung sind gegeben durch die Untergruppe*

$$\mathrm{R}(D) = \{(r_x)_{x \in X_0} \mid r_x \in K(X)_x, \nu_x(r_x) + n_x \geq 0\} \subseteq \mathrm{R}.$$

Lemma 4.2. *(1) Es läßt sich* $K(X)$ *diagonal in* R *einbetten.*

(2) Es gilt $\mathrm{R}(D) \subseteq \mathrm{R}(D')$*, sofern* $D \leq D'$.

(3) Es gilt $\mathrm{R} = \varinjlim_D \mathrm{R}(D)$*, wobei der direkte Limes über das Sytem der Divisoren bezüglich der partiellen Ordnung* $\leq$ *zu verstehen ist.*

Definition 4.3. *(1) Wir setzen* $\mathrm{I}(D) = \mathrm{R}/\big(\mathrm{R}(D) + K(X)\big)$ *und* $i(D) = \dim_k \mathrm{I}(D)$.

(2) Wir definieren die Eulercharakteristik als

$$\chi(D) = \chi(X, \mathscr{L}(D)) = \ell(D) - i(D).$$

Wir müssen noch zeigen, daß die Dimensionen $\ell(D)$ und $i(D)$ endlich sind. Dies geschieht im nächsten Kapitel.

Lemma–Definition 4.4. *Die Zahlen* $\ell(D)$ *und* $i(D)$ *hängen von* D *nur bis auf lineare Äquivalenz ab. Wir definieren also* $\chi(\mathscr{L}) = \chi(X, \mathscr{L})$ *für ein Linienbündel* $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ *durch* $\chi(D)$ *für einen Divisor* D *mit* $\mathscr{L} \cong \mathscr{L}(D)$.

Beweis: Ist $D = \mathrm{div}(f) + D'$, so definiert die Multiplikation mit f Isomorphismen $\mathrm{L}(D) \to \mathrm{L}(D')$ und $\mathrm{R}(D) \to \mathrm{R}(D')$ und damit $\mathrm{I}(D') \to \mathrm{I}(D)$. □

Satz 4.5 (5-Term Sequenz). *Sei* D *ein Divisor auf der Kurve* X/k *und* x *ein abgeschlossener Punkt. Dann gibt es eine kanonische exakte Sequenz*

$$0 \to L(D) \to L(D+x) \to \kappa(x) \to I(D) \to I(D+x) \to 0.$$

Beweis: Sei t eine Uniformisierende im Punkt x und n_x der Koeffizient von x in D. Dann definiert die Multiplikation mit t^{-n_x} einen Isomorphismus

$$\kappa(x) = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}/t\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \cong t^{-n_x}\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}/t^{-(n_x-1)}\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} = \ker\big(\mathrm{R}/\mathrm{R}(D) \to \mathrm{R}/\mathrm{R}(D+x)\big).$$

Wir erhalten die Sequenz des Satzes aus dem Schlangenlemma angewandt auf

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & K(X) \arrow[r, equal] \arrow[d] & K(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \kappa(x) \arrow[r] & \mathrm{R}/\mathrm{R}(D) \arrow[r] & \mathrm{R}/\mathrm{R}(D+x) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

und der Identität $\mathrm{R}(D) \cap K(X) = L(D)$ in R. □

Bemerkung: der adelische Komplex. Die Repartitionen R und $\mathrm{R}(D)$ zum Divisor $D = \sum n_x \cdot x$ auf X sind die globalen Schnitte der Garben

$$\mathscr{R} : U \mapsto \mathscr{R}(U) = \{(r_x)_{x \in X_0 \cap U} \mid r_x \in K(X)_x, \text{ fast alle } r_x \in \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}\},$$

$$\mathscr{R}(D) : U \mapsto \mathscr{R}(D)(U) = \{(r_x)_{x \in X_0 \cap U} \mid r_x \in K(X)_x, \nu_x(r_x) + n_x \geq 0\}.$$

Die Garben $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}(D)$ und damit $\mathscr{R}/\mathscr{R}(D)$ sind welk. Die Sequenz

$$0 \to \mathscr{L}(D) \to \mathscr{K} \to \mathscr{R}/\mathscr{R}(D) \to 0$$

ist exakt. Daher rechnet der adelische Komplex

$$\mathscr{K} \to \mathscr{R}/\mathscr{R}(D)$$

die Kohomologie $\mathrm{H}^*\big(X, \mathscr{L}(D)\big)$ aus. Es gilt demnach kanonisch

$$\mathrm{L}(D) = \mathrm{H}^0\big(X, \mathscr{L}(D)\big) \text{ und } \mathrm{I}(D) = \mathrm{H}^1\big(X, \mathscr{L}(D)\big).$$

Die höheren Kohomologiegruppen verschwinden. Wir erkennen nun, daß die Sequenz aus dem Satz nichts anderes ist als die lange exakte Kohomologiesequenz zu

$$0 \to \mathscr{L}(D) \to \mathscr{L}(D+x) \to \kappa(x) \to 0,$$

wobei $\kappa(x)$ die in x konzentrierte Wolkenkratzergarbe mit Halm $\kappa(x)$ bezeichnet.

Die Konstruktion einer adelischen, welken Auflösung besitzt höherdimensionale Verallgemeinerungen, siehe [Hu].

Satz 4.6 (Eulercharakteristik — erste Form von Riemann-Roch). *Sei $\mathscr{L}$ ein Linienbündel auf der Kurve X/k. Dann gilt*

$$\chi(X, \mathscr{L}) = \deg(\mathscr{L}) + \chi(X, \mathcal{O}_X).$$

Beweis: Aus der 5-Term Sequenz erhält man für die alternierende Summe der Dimensionen die Gleichung

$$\ell(D) - \ell(D+x) + [\kappa(x) : k] - i(D) + i(D+x) = 0.$$

Damit verändert sich $\chi(D) - \deg(D)$ nicht, wenn man einen Punkt x zu D addiert. Somit gilt

$$\chi(D) - \deg(D) = \chi(0) - \deg(0),$$

was für das Linienbündel $\mathscr{L}(D)$ zu beweisen war. □

Jetzt müssen wir unsere Schulden tilgen und die Endlichkeit von $\ell(D)$ und $i(D)$ beweisen.

5 Der Kohärenzsatz

Theorem 5.1 (Kohärenzsatz). *Sei X/k eine Kurve und $\mathscr{L} = \mathscr{L}(D)$ ein Linienbündel auf X. Dann sind $\ell(D)$ und $i(D)$ endlich.*

Beweis: Aus der 5-Term Sequenz folgen die Ungleichungen

$$\infty > [\kappa(x) : k] \geq \ell(D + x) - \ell(D) \geq 0,$$

$$\infty > [\kappa(x) : k] \geq i(D) - i(D + x) \geq 0.$$

Damit genügt es, jeweils für nur einen Divisor die Endlichkeit von $\ell(D)$ (bzw. $i(D)$) nachzuweisen. Für $\ell(D)$ leistet dies das folgende Lemma.

Lemma 5.2. *(1) Aus $\deg(D) < 0$ folgt $\ell(D) = 0$. (2) Es gilt $\ell(0) = 1$.*

Beweis: (1) Ein $0 \neq f \in \mathrm{L}(D)$ führt zu einem effektiven Divisor $D' = D + \operatorname{div}(f)$ von Grad $\deg(D') = \deg(D) < 0$, ein Widerspruch.

(2) Äquivalent hat man zu zeigen, daß $\mathrm{L}(0) = k$ nur aus den Konstanten besteht. Es ist $\mathrm{L}(0)$ sogar ein Ring, und zwar von endlicher Dimension über k nach (1), und ein Unterring von $K(X)$. Somit ist $\mathrm{L}(0)$ in der Menge der über k algebraischen Elemente von $K(X)$ enthalten. Nach den Voraussetzungen an eine Kurve ist dies genau k selbst. □

Wir zeigen nun die Endlichkeit von $i(D)$. Wir setzen $g(D) = \deg(D) - \ell(D)$. Aus den obigen Ungleichungen folgt $g(D + x) \geq g(D)$. Die Hilfsfunktion g ist also monoton auf der Gruppe der Divisoren bzgl. der partiellen Ordnung, welche durch effektive Divisoren definiert wird.

Unmittelbar aus der Definition folgt

$$i(D) = 0 \iff \text{für alle } D' \geq D \text{ gilt } \big(\mathrm{R}(D') + K(X)\big)/\big(\mathrm{R}(D) + K(X)\big) = 0.$$

Für $D' \geq D$ haben in der exakten Sequenz

$$0 \to \mathrm{L}(D')/\mathrm{L}(D) \to \mathrm{R}(D')/\mathrm{R}(D) \to \big(\mathrm{R}(D') + K(X)\big)/\big(\mathrm{R}(D) + K(X)\big) \to 0$$

die auftretenden Vektorräume von links nach rechts die Dimensionen $\ell(D') - \ell(D)$, $\deg(D' - D)$ und folglich $g(D') - g(D)$. Somit gilt $i(D) = 0$ genau dann, wenn g in D sein Maximum annimmt. Ein solches D gibt es genau dann, wenn g nach oben beschränkt ist.

Lemma 5.3. *Es gibt einen effektiven Divisor $D > 0$, so daß $g(nD)$ für $n \in \mathbb{N}$ beschränkt bleibt.*

Beweis: Sei $f : X \to \mathbb{P}^1_k$ nicht konstant und $D = \operatorname{div}_\infty(f)$ der Polstellendivisor von f. Sei $h_1, \ldots, h_r$ eine Basis von $K(X)/k(f)$ als $k(f)$-Vektorraum mit $r = \deg(D)$. Sei $C \geq 0$ ein Divisor auf X, welcher alle Pole der endlich vielen

Funktionen h_i aufnimmt, also $\operatorname{div}(h_i) \geq -C$ für alle $1 \leq i \leq r$. Dann sind die Funktionen $h_i \cdot f^\alpha$ für $1 \leq i \leq r$ und $0 \leq \alpha \leq n$ linear Unabhängig über k in $\mathrm{L}(nD + C)$. Somit gilt $\ell(nD + C) \geq (n + 1) \cdot \deg(D)$ und es folgt

$$g(nD) \leq g(nD + C) = \deg(nD + C) - \ell(nD + C) \leq \deg(C) - \deg(D).$$

□

Wir zeigen nun, daß g nach oben beschränkt ist. Dazu genügt es aufgrund der Monotonie, sich mit effektiven Divisoren zu befassen. Sei also $D \geq 0$ beliebig und $D' > 0$ wie im Lemma, so daß $g(nD')$ beschränkt ist. Dann gilt

$$\ell(nD' - D) = \deg(nD' - D) - g(nD' - D) \geq n \cdot \deg(D') - \deg(D) - g(nD').$$

Somit wird $\ell(nD' - D)$ für große n positiv. Dies bedeutet, daß D linear äquivalent ist zu einem Divisor $D_1 \leq nD'$. Da g auf linearen Äquivalenzklassen konstant ist, folgt aus der Monotonie

$$g(D) = g(D_1) \leq g(nD')$$

die Beschränktheit von g. Damit ist der Kohärenzsatz für Kurven bewiesen. □

6 Residuen auf Kurven

Theorem 6.1 (Existenz von Residuen). *Zu jedem abgeschlossenen Punkt x einer glatten Kurve X/k gibt es genau eine k-lineare Residuenabbildung*

$$\operatorname{res}_x : \Omega_{K(X)/k} \otimes_{K(X)} K(X)_x \to k,$$

mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Das Residuum verschwindet auf regulären und auf exakten Differentialen:

$$\operatorname{res}_x\big(\Omega_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}\big) = 0 \quad \textit{und} \quad \operatorname{res}_x\big(d(K(X))\big) = 0.$$

(ii) Verträglichkeit mit Konstantenkörpererweiterungen: für eine Körpererweiterung k'/k bezeichne $\mathrm{pr} : X' = X \otimes_k k' \to X$ die Projektion. Dann gilt für ein $\omega \in \Omega_{K(X)/k} \otimes_{K(X)} K(X)_x$ die Gleichung

$$\operatorname{res}_x(\omega) = \sum_{x_i \mapsto x} \operatorname{res}_{x_i}\big((\mathrm{pr}^*\omega)_i\big),$$

wobei $(\mathrm{pr}^*\omega)_i$ die x_i-Komponente von

$$\mathrm{pr}^*\omega \in \big(\Omega_{K(X)/k} \otimes_{K(X)} K(X)_x\big) \otimes_k k' = \prod_{x_i \mapsto x} \Omega_{K(X')/k'} \otimes_{K(X')} K(X')_{x_i}$$

bezeichnet.

(iii) Eichung: für einen k-rationalen Punkt $x \in X(k)$ und einen lokalen Parameter $t \in \mathcal{O}_{X,x}$ gilt $k((t))dt = \Omega_{K(X)/k} \otimes_{K(X)} K(X)_x$ und die Residuenformel

$$\mathrm{res}_x\big((\sum_{i \gg -\infty} a_i t^i)dt\big) = a_{-1}.$$

Beweisskizze: Die Eindeutigkeit ist klar aus Eigenschaft (ii) und (iii), da für jeden Punkt x in einer geeigneten Konstantenkörpererweiterung k'/k über x ausschließlich k'-rationale Punkte liegen.

Für die Definition des Residuums gibt es zwei verschiedene Ansätze. In [Se1] §11 wird das Residuum nur für algebraisch abgeschlossene k definiert und dort mittels der Formel aus (iii). Dann hat man die Unabhängigkeit von der Wahl eines lokalen Parameters nachzuweisen, siehe [Se1] §11 Prop 5', was gerade in Charakteristik $p > 0$ erst nach einigem Aufwand gelingt. Die Eigenschaften des Theorems finden sich in [Se1] wie folgt: Die Verschwindungsaussagen (i) unter [Se1] §11 Prop 5' (ii) & (iii), für die Konstantenkörpererweiterung ist hier wegen $k = k^{\mathrm{alg}}$ nichts zu zeigen, und die Residuenformel (iii) gilt per Definition.

Eine Alternative wird in [Ta] vorgeschlagen. Das Residuum wird als Spur

$$\mathrm{res}_x(f\,dg) = \mathrm{Sp}_{K(X)_x}[f_1, g_1]$$

für gewisse zu f und g assoziierte k-Endomorphismen f_1 und g_1 von $K(X)_x$ definiert. Dabei hat man eine Theorie der Spuren endlich-potenter Endomorphismen von Vektorräumen unendlicher Dimension bereit zu stellen. Mittels dieser Technik allerdings wird die Definition des Residuums uniform für alle Körper k geleistet und alle weiteren Eigenschaften und Sätze ergeben sich dann ohne größeren Aufwand. Genauer folgt die Verschwindungsaussage (i) aus [Ta] §2 (R_2) & (R_3), das Verhalten unter Konstantenkörpererweiterung folgt sofort aus der Additivität der Spur in direkten Produkten und der Basiswechselverträglichkeit des Spurbildens, und die Residuenformel aus (iii) findet sich als [Ta] §3 Thm 2. □

Korollar 6.2. *Sei x ein Punkt einer glatten Kurve mit separabler Restklassenkörpererweiterung und t ein lokaler Parameter bei x. Dann gilt*

$$\mathrm{res}_x\big((\sum_{i \gg -\infty} a_i t^i)dt\big) = \mathrm{Sp}_{\kappa(x)/k}(a_{-1}).$$

Beweis: Dies folgt aus (ii) und (iii) im Fall der Erweiterung mit $\kappa(x)/k$. □

Korollar 6.3. *Für $n \in \mathbb{Z}$ und $0 \neq f \in K(X)_x$ gilt*

$$\mathrm{res}_x\Big(\frac{df}{f^n}\Big) = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ [\kappa(x):k] \cdot \nu_x(f) & n = 1 \end{cases}$$

Beweis: Siehe [Ta] §2 (R_3) und (R_4), oder [Se1] §11 Prop 5'(iv). □

Lemma 6.4. *Sei x ein Punkt der glatten Kurve X/k und t ein lokaler Parameter in x. Dann ist die Einschränkung des Residuums auf den Raum der Differentiale mit einfachem Pol in x nicht identisch* 0.

Beweis: Falls $\kappa(x)/k$ separabel ist, können wir mit Korollar 6.2 schließen, da $\mathrm{Sp}_{\kappa(x)/k}$ dann nicht trivial ist. Den allgemeinen Fall führen wir mittels Konstantenkörpererweiterung $X' = X \otimes_k k'$ in einer hinreichend großen Erweiterung k'/k, so daß die Punkte über x separabel über k' werden, auf den separablen Fall zurück. Denn es ist res_x trivial, genau falls $\mathrm{res}_x \otimes \mathrm{id}_{k'} = \sum_{x_i \mapsto x} \mathrm{res}_{x_i}$ trivial ist und

$$\big(\Omega_{X,x} \otimes t^{-1}\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}\big) \otimes_k k' = \prod_{x_i \mapsto x} \Omega_{X',x_i} \otimes t_i^{-p^\alpha} \widehat{\mathcal{O}}_{X',x_i},$$

wobei t (bzw. t_i) ein lokaler Parameter bei x (bzw. bei x_i) ist und p^α der inseparable Anteil $[\kappa(x) : k]_i$ des Körpergrads von $\kappa(x)/k$ ist. □

7 Der Residuensatz

Satz 7.1 (Adjunktionsformel). *Sei $f : Y \to X$ eine endliche Abbildung glatter Kurven, $y \in Y$ ein abgeschlossener Punkt und $\omega \in \Omega_{K(Y)/k} \otimes_{K(Y)} K(Y)_y$.*

(1) Sei $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt mit Bild $f(x) = y$. Dann gilt für $g \in K(X)_x$ die Adjunktionsformel

$$\mathrm{res}_x(g \cdot f^*\omega) = \mathrm{res}_y\big(\mathrm{Sp}_{K(X)_x/K(Y)_y}(g) \cdot \omega\big).$$

(2) Für $g \in K(X) \otimes_{K(Y)} K(Y)_y = \prod_{x \mapsto y} K(X)_x$ mit Komponenten g_x gilt die Adjunktionsformel

$$\sum_{x \mapsto y} \mathrm{res}_x(g_x \cdot f^*\omega) = \mathrm{res}_y\big(\mathrm{Sp}(g) \cdot \omega\big),$$

wobei Sp *die Abbildung* $\mathrm{Sp}_{K(X)/K(Y)} \otimes \mathrm{id} : K(X) \otimes_{K(Y)} K(Y)_y \to K(Y)_y$ *ist.*

Beweis: Da Sp mit der Summe der Spuren $\mathrm{Sp}_{K(X)_x/K(Y)_y}$ über alle Punkte x der Faser über y übereinstimmt, folgt (2) durch Summation über die Faser aus (1). Falls $K(X)/K(Y)$ nicht separabel ist, so sind sowohl die auftretenden Spuren als auch der Rückzug f^* von Differentialen identisch 0, die Formel somit trivial und wertlos.

Der Beweis der Adjunktionsformel erfolgt in Tate'schen Ansatz direkt und uniform für alle Körper k, siehe [Ta] §3 Thm 4, während die Serre'sche Methode das *'principe de prolongement des identités algébriques'* verwendet, um den Fall positiver Charakteristik auf den Fall der in Charakteristik 0 zurückzuführen, siehe [Se1] §12+ §13 Lemme 4+5. □

Satz 7.2 (Residuensatz). *Sei X/k eine glatte Kurve. Dann gilt für alle rationalen Differentiale $\omega \in \Omega_{K(X)/k}$ der Residuensatz*

$$\sum_{x \in X_0} \mathrm{res}_x(\omega) = 0.$$

Beweis: In [Ta] §3 Thm 3 folgt dies aus allgemeinen Überlegungen zur Spur und im Wesentlichen aus dem Kohärenzsatz.

Alternativ kann man wie in [Se1] §7 Prop 6 & §12 den Residuensatz aus der Adjunktionsformel ableiten. Dazu wählt man ein $f \in K(X)$, so daß $f : X \to \mathbb{P}^1_k$ generisch separabel ist, d.h. $K(X)/k(f)$ ist separabel. Dann schreibt man $\omega = g \cdot f^*dt$, wobei t die Standardkoordinate auf $\mathbb{A}^1_k \subset \mathbb{P}^1_k$ ist. Die Separabilität sorgt dafür, daß f^*dt nicht verschwindet. Dann gilt

$$\sum_{x \in X_0} \mathrm{res}_x(\omega) = \sum_{x \in X_0} \mathrm{res}_x(g \cdot f^*dt) = \sum_{y \in \mathbb{P}^1_k} \mathrm{res}_y\big(\mathrm{Sp}_{K(X)/K(\mathbb{P}^1_k)}(g)dt\big).$$

Es bleibt der Fall $X = \mathbb{P}^1_k$. Sei $\omega = h \cdot dt$. Nach einer Konstantenkörpererweiterung, welche nach Theorem 6.1 (ii) die Residuensumme nicht ändert, dürfen wir annehmen, daß alle Pole und Nullstellen von h über k rational sind. Damit besitzt h eine Partialbruchzerlegung der Form

$$h = \text{ Polynom } + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij}}{(t-a_i)^j}.$$

Benutzen wir weiter, daß $d(t-a) = dt$ für alle $a \in k$ gilt und daß die Automorphismengruppe von $\mathbb{P}^1_k$ transitiv auf den k-rationalen Punkten operiert, so reicht es aus, den Fall $\omega = dt/t^n$ zu diskutieren (der Polynomanteil aus der Partialbruchzerlegung führt zum Beitrag bei ∞).

Nun ist $\omega = dt/t^n$ regulär auf $\mathbb{P}^1_k - \{0, \infty\}$ und somit

$$\sum_{x \in \mathbb{P}^1_k} \mathrm{res}_x(\frac{dt}{t^n}) = \mathrm{res}_0(\frac{dt}{t^n}) + \mathrm{res}_\infty(\frac{dt}{t^n}) = \mathrm{res}_0(\frac{dt}{t^n}) - \mathrm{res}_\infty(\frac{d(t^{-1})}{(t^{-1})^{2-n}}) = \delta_{n,1} - \delta_{2-n,1} = 0.$$

□

8 Dualität und Riemann-Roch für Linienbündel auf Kurven

Definition 8.1. *Wir setzen* $\mathrm{J}(D) = \mathrm{Hom}\big(I(D), k\big)$ *für das Vektorraumdual von* $I(D)$ *und* $\mathrm{J} = \varinjlim_D J(D)$*, wobei der Limes über Divisoren* D *bzgl. der partiellen Ordnung* $\geq$ *vermittelt wird durch die duale Abbildung zur Surjektion* $I(D') \twoheadrightarrow I(D)$ *für* $D \geq D'$.

Damit wird J ein topologisches Dual von $\mathrm{R}/K(X)$ bzgl. der von den Untervektorräumen $\mathrm{R}(D) + K(X)/K(X)$ als offenen Mengen erzeugten Topologie. Von einer stetigen Linearform verlangen wir, daß sie auf einem dieser Unterräume verschwindet.

Satz 8.2. *Die $K(X)$-Vektorraumstruktur auf* R *definiert auf* J *die Struktur eines $K(X)$-Vektorraums und* $\dim_{K(X)} \mathrm{J} = 1$.

Beweis: Sei $f \in K(X)$ und $\lambda \in \mathrm{J}(D)$. Dann ist $f\lambda$ die Linearform $r \mapsto \lambda(fr)$ auf $\mathrm{R}/K(X)$. Diese annuliert den Unterraum $\mathrm{R}(D - \mathrm{div}(f)) + K(X)/K(X)$. Somit ist $f\lambda \in J\big(D - \mathrm{div}(f)\big)$ stetig.

Nun zur Dimension. Es ist $\mathrm{J} \neq 0$, sonst wäre $I(D) = 0$ für alle Divisoren D und damit für $D < 0$ die Eulercharakteristik $\chi(D) = 0$ im Widerspruch zur ersten Version von Riemann-Roch.

Somit reicht es, ausgehend von über $K(X)$ linear unabhängigen Elementen $\alpha, \beta \in \mathrm{J}$ einen Widerspruch zu konstruieren. Wir nehmen an, daß der Divisor D klein genug ist, damit α und β in $\mathrm{J}(D)$ liegen. Des weiteren wählen wir eine Folge von Divisoren Δ_n, deren Grade unbeschränkt wachsen. Die Abbildung

$$\mathrm{L}(\Delta_n) \oplus \mathrm{L}(\Delta_n) \hookrightarrow J(D - \Delta_n), \qquad f, g \mapsto f\alpha + g\beta$$

ist injektiv. Die resultierende Dimensionsungleichung zusammen mit der ersten Version von Riemann-Roch ergibt

$$2\deg(\Delta_n) + 2\chi(0) + 2i(\Delta_n) = 2\ell(\Delta_n) \leq i(D - \Delta_n) = \ell(D - \Delta_n) - \chi(0) - \deg(D - \Delta_n)$$

und führt wegen $\ell(D - \Delta_n) = 0$ für $n \gg 0$ zu

$$\deg(\Delta_n) + 2i(\Delta_n) \leq -3\chi(0) - \deg(D), \quad n \gg 0.$$

Nach Wahl der Δ_n ist die linke Seite nach oben unbeschränkt, ein Widerspruch. □

Theorem 8.3 (Dualität). *Sei X/k eine glatte Kurve. Die Residuenpaarung*

$$\langle\ ,\ \rangle : \Omega_{K(X)/k} \otimes_k \mathrm{R} \to k, \quad \omega, r \mapsto \langle \omega, r \rangle = \sum_{x \in X_0} \mathrm{res}_x(r_x \omega),$$

wobei r_x die x-Komponente der Repartition r bezeichne, ist wohldefiniert und induziert einen Isomorphismus $\vartheta : \Omega_{K(X)/k} \to \mathrm{J}$ von $K(X)$-Vektorräumen.

Für einen Divisor D induziert die Einschränkung von ϑ einen Isomorphismus

$$\vartheta_D : \Omega_{K(X)/k}(-D) \to \mathrm{J}(D)$$

von k-Vektorräumen und damit mit dem kanonischen Divisor $K = \mathrm{div}(\omega)$ eine nichtausgeartete Paarung

$$\langle\ ,\ \rangle : L(K - D) \otimes_k I(D) \to k, \quad (f, r) \mapsto \langle f\omega, r \rangle.$$

Beweis: Wir definieren zunächst ϑ_D durch die angegebene Formel der Paarung $L(K - D) \otimes_k I(D) \to k$. Dies ist wohldefiniert, da das Residuum in x eines in x regulären Differentials verschwindet, Dank des Residuensatzes, und aufgrund der adelischen Bedingung an eine Repartition. Letztere bewirkt, daß wir nur eine endliche Summe auszuwerten haben.

Für $D \geq D'$ ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{K(X)/k}(D) \arrow[r, "\vartheta_D"] \arrow[d] & \mathrm{J}(D) \arrow[d] \\
\Omega_{K(X)/k}(D') \arrow[r, "\vartheta_{D'}"] & \mathrm{J}(D')
\end{tikzcd}$$

Im Limes erhalten wir eine Abbildung $\vartheta : \Omega_{K(X)/k} \to \mathrm{J}$, welche sogar $K(X)$-linear ist wegen $\langle \omega, fr \rangle = \langle f\omega, r \rangle$.

Die Abbildung ϑ ist nichttrivial wegen Lemma 6.4. Da die beiden $K(X)$-Vektorräume $\Omega_{K(X)/k}$ und J die Dimension 1 haben, muß ϑ ein Isomorphismus sein.

Damit ist auch ϑ_D injektiv. Die Surjektivität von ϑ_D folgt mit $\vartheta^{-1}(\mathrm{J}(D)) = \Omega_{K(X)/k}(-D)$, was man wie folgt sieht. Sonst gäbe es nämlich ein $\omega \in \vartheta^{-1}(\mathrm{J}(D)) \setminus \Omega_{K(X)/k}(-D)$, also $\langle \omega, \mathrm{R}(D) \rangle \equiv 0$ und für einen abgeschlossener Punkt $x \in X$ ist der Koeffizient von $\mathrm{div}(\omega) - D$ negativ. Dies widerspricht Lemma 6.4. □

Als unmittelbares Korrollar zum Dualitätssatz erhalten wir das Ziel dieser Notizen, den Satz von Riemann-Roch auf Kurven.

Theorem 8.4 (Riemann-Roch für Kurven). *Sei X/k eine glatte Kurve, $\mathscr{L}$ ein Linienbündel und D ein Divisor auf X. Sei K ein kanonischer Divisor. Dann gilt:*

(1) $\chi(X, \mathcal{O}_X) = 1 - g$,

(2) $\dim_k \mathrm{H}^0\big(X, \mathscr{L}\big) - \dim_k \mathrm{H}^0\big(X, \Omega_{X/k} \otimes \mathscr{L}^\vee\big) = \deg(\mathscr{L}) + 1 - g$.

(3) $\ell(D) - \ell(K - D) = \deg(D) + 1 - g$.

Beweis: Der Dualitätssatz zeigt: $i(D) = \ell(K - D)$ und $g = \ell(K) = i(0)$. Daher:

$$\ell(D) - \ell(K - D) = \chi(D) = \deg(D) + \chi(0) = \deg(D) + 1 - g.$$

□

Literatur

[Fu] Fulton, W., *Algebraic Curves*, Benjamin, New York, 1969.

[Ha] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Springer, GTM **52**, 1977.

[Hu] Huber-Klawitter, A., On the Parshin-Beilinson adeles for schemes, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **61** (1991), 249–273.

[Se1] Serre, J.-P., Kapitel II aus *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris, 1959.

[Se2] Serre, J.-P., *Local fields*, Springer, GTM **67**, 1979.

[Ta] Tate, J., Residues of differentials on curves, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* **1**, 4 (1968), 149–159.